

# TESIS

## FORMULACION TRIDIMENSIONAL DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO CON INTERPOLACION PARABOLICA

por

**Manuel DOBLARÉ CASTELLANO**

Ingeniero Industrial por la E.T.S. de I.I. de Sevilla

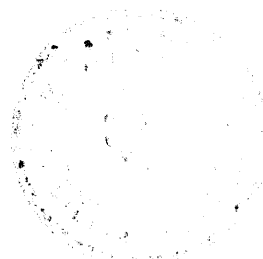
presentada en la

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES  
de la  
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Madrid, Abril de 1.981



R. 45

TESIS DOCTORAL

FORMULACION TRIDIMENSIONAL DE LOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO EN INTERPOLACION PARABOLICA

Por: Manuel Doblaré Castellano.

Director de Tesis: D. Antonio Martín Navarro.

Catedrático Supervisor: D. Enrique Alarcón Alvarez

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: D. Rafael Portaencasa Baeza

Vocales: D. Alberto Dou Mas de Xexás

D. Román Ríaza Pérez

D. Angel María Sánchez Pérez

D. Enrique Alarcón Alvarez

Madrid Abril 1981

## PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS.

El método de los elementos de contorno ha suscitado un interés creciente en los últimos diez años, presentandose como una herramienta útil para la resolución de problemas de la ingeniería estructural, modelados matemáticamente por sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

A través de una formulación integral en el contorno del dominio, donde se define el problema, se consigue la resolución de éste, mediante la sola discretización de aquél, en contraposición a los métodos de dominio, que necesitan la completa discretización del mismo (Elementos Finitos).

Estos años han servido, por un lado para cimentar el método anterior en cuanto a sus bases matemáticas se refiere, y por otro para definir los campos de la Física donde su utilización podría ser mas efectiva. Puede decirse que han sido lo que la década de los 60 para elementos finitos: la preparación inicial para el desarrollo espectacular hoy alcanzado. De hecho, el método de los elementos finitos es capaz de abordar eficazmente los grandes retos que plantea el cálculo estructural en la actualidad, mientras que los elementos de contorno no han alcanzado aún dicho estadio.

Esta Tesis pretende establecer el camino definitivo para la resolución de este tipo de problemas en el caso elástico tridimensional.

Para ello, se ha desarrollado la formulación pertinente tanto en su fase, puramente matemática, como numérica para medios tridimensionales heterogéneos, así como un programa de grandes posibilidades que permiten atacar cualquier caso prácticamente sin limitaciones de tamaño, geometría ó condiciones de contorno en el marco de la Elasticidad Tridimensional.

El trabajo se compone de dos partes claramente diferenciadas, el estudio y planteamiento del método, así como la descripción de las soluciones adoptadas para la resolución de los múltiples problemas numéricos que plantea no solo el método en sí, sino la implementación de un programa de tales características, y de un anexo que comprende la descripción detallada de cada uno de los apartados que componen el programa.

Por último y paralelamente se ha analizado también el caso axisimétrico, problema tridimensional con características muy específicas, desarrollándose su formulación e implementando asimismo un programa que demuestra la exactitud de dicha formulación.

El autor quiere expresar su profundo reconocimiento a los profesores - Antonio Martín y Enrique Alarcón por su apoyo y estímulo en el desarrollo del trabajo, así como sus valiosas sugerencias e inestimables aportaciones.

De igual manera al profesor Federico París por su constante ayuda en - la elaboración del mismo, a mi compañero Francisco G. Benítez y a Jose M<sup>a</sup> Sebas tiañ por idéntico motivo.

También querría dar las gracias a D. Manuel Díaz del Río por la motivación práctica que ha aportado al trabajo, a través de múltiples sugerencias y da- tos técnicos, y a D. Pedro Mestre, D. Manuel Dominguez y demás miembros del - Centro de Cálculo del M.E.C. por las facilidades otorgadas en la realización del= mismo.

Finalmente mi agradecimiento a Concepción Fernandez por el gran núme ro de horas invertidas durante la mecanografía del texto.

Madrid Abril 1.981

## INDICE

Lista de Símbolos.	XI
 CAPITULO 1. CONCEPTOS BASICOS.	 1
1.1.- Principios variacionales en elasticidad.....	2
1.2.- Soluciones débiles.....	12
1.3.- Solución numérica del problema elástico.....	19
1.4.- Formulaci3n matricial de los elementos finitos.....	25
1.5.- El m3todo de los elementos de contorno.....	32
1.6.- Transformaci3n de la ecuaci3n de Navier en una Ecuaci3n Integral a trav3s de la Teor3a de distribuciones.....	36
1.7.- Soluci3n fundamental de la ecuaci3n de Navier.....	46
 CAPITULO 2. FORMULACION DEL METODO EN ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL	 56
2.1.- Introducci3n.....	56
2.2.- Movimientos en puntos internos.....	58
2,3,- Tensiones en puntos internos.....	64
2.4.- Ecuaci3n de Somigliana para puntos del contorno.....	69
2.5.- Tensor de tensiones en puntos del contorno.....	78
2.6.- Transformaci3n de la integral de fuerzas de volumen en una integral de superficie.....	81

### CAPITULO 3. APROXIMACION NUMERICA. INTEGRACION PARA BOLICA EN EL CASO TRIDIMENSIONAL.

94

3.1.- Discretización y tratamiento de las ecuaciones integrales.....	94
3.1.1.- Aproximación de la geometría.....	98
3.1.2.- Aproximación de las funciones solución.....	104
3.1.3.- Discretización. Formulación matricial del problema .....	107
3.2.- Cálculo de las constantes de integración.....	113
3.2.1.- Introducción.....	113
3.2.2.- Puntualizaciones sobre la cuadratura de Gauss	115
3.2.2.1.- Error en la cuadratura de Gauss...	118
3.2.3.- Subdivisión en subelementos. Cálculo de los puntos de integración en cada subelemento....	124
3.2.3.1.- Cálculo de la distancia mínima de punto a un elemento.....	134
3.2.3.2.- Cálculo de las variaciones $\partial s / \partial \xi_i$ y del Jacobiano J.....	137
3.2.3.3.- Proceso de subdivisión de un elemento cuando el nodo desde el que se integra pertenece al elemento...	139
3.2.3.4.- Subdivisión en el caso de que el nodo pertenezca al elemento.....	142
3.2.4.- Cálculo de las funciones subintegrales correspondientes a las matrices A, B y P en los puntos de integración.....	150

3.3.- Formación del sistema de ecuaciones.....	152
3.3.1.- Tipología de los nodos.....	155
3.3.2.- Condensación de tensiones de interfase.....	160
3.3.3.- Ordenación de la matriz de coeficiente del sistema.....	168
3.4.- Aplicación de las condiciones de contorno.....	173
3.4.1.- Aplicación directa.....	202
3.4.2.- Aplicación de la relación de Cauchy.....	208
3.4.3.- Caso de tensiones principales.....	216
3.5.- Resolución del sistema de ecuaciones.....	225
3.5.1.- El método del gradiente conjugado.....	228
3.5.2.- Aspectos computacionales.....	238
 CAPITULO 4. EL CASO AXISIMETRICO	 241
4.1.- Introducción.....	241
4.2.- Formulación.....	242
4.2.1.- Movimientos en puntos internos.....	243
4.2.2.- Tensiones en puntos internos.....	251
4.2.3.- Ecuación de Somigliana para puntos del contorno.....	260
4.2.4.- Tensor de tensiones en puntos del contorno....	267
4.2.5.- Tratamiento de las fuerzas por unidad de volumen.....	269
4.3.- Aproximación numérica. Caso de aproximación constante.	272
4.3.1.- Representación de la superficie del dominio y de las funciones.....	272
4.3.2.- Discretización de la ecuación integral.....	274



4.3.3.- Evaluación de las constantes de integración.....	277
4.3.4.- Aplicación de condiciones de contorno y resolución del problema.....	287
4.4.- Extensión al caso plástico .....	291
 CAPITULO 5. RESULTADOS	 309
5.1.- Cubo sometido a tracción.....	309
5.2.- Cilindro sometido a presión interna.....	318
5.2.1.- Análisis como dominio tridimensional.....	319
5.2.2.- Análisis como caso axisimétrico.....	323
5.3.- Esfera sometida a presión interna.....	327
5.4.- Cubo sometido a cargas de tracción en puntos internos.....	333
5.5.- Material heterogeneo sometido a tracción.....	335
5.6.- Análisis del Dolo.....	338
5.7.- Cilindro con fisura.....	347
 CAPITULO6. CONCLUSIONES Y POSIBLES EXTENSIONES	 351
6.1.- Resultados y conclusiones .....	351
6.2.- Aplicaciones y desarrollo futuro.....	354
 CAPITULO7. BIBLIOGRAFIA	 357

APENDICE 1. ECUACIONES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO  
ELASTICO 376

APENDICE 2. RELACIONES EN EL CASO AXISIMETRICO 381

AII.1.- Algunas propiedades de las funciones de Legendre.....	381
AII.2.- Derivadas del tensor de Galerkin.....	384
AII.3.- Cálculo del tensor $U_{ik}$ .....	391
AII.4.- Derivadas del tensor $U_{ik}$ .....	395
AII.5.- Integrales analíticas en el contorno ...	409
AII.5.1.- Integrales correspondientes al cálculo de A.....	409
AII.5.2.- Integrales correspondientes al cálculo de B.....	412
AII.6.- Integrales analíticas en el dominio....	415
AII.6.1.- Cálculo de las integrales correspondientes a T.....	415
AII.6.2.- Cálculo de las integrales correspondientes a T'	418
Biografía del autor	425

## SIMBOLOS LATINOS

$A$	Operador diferencial.
$A_h$	Operador diferencial en un espacio de dimensión finita.
$a_{ijkl}$	Tensor opuesto al de Lamé.
$\underline{A}, \underline{E}, \underline{F},$ $\underline{B}, \underline{P}$	Matrices propias del M.E.C. en la formulación de movimientos.
$b$	Vector de carga.
$B_\epsilon(x)$	Bola de radio $\epsilon$ centrada en el punto $x$ .
$c$	Constante.
$\underline{C}, \underline{D}, \underline{P}, \underline{Z},$ $\underline{L}, \underline{Z}, \underline{K}, \underline{Q},$ $\underline{\Delta}$	Distintas matrices que aparecen en el M.E.F.
$C_e$	Operador de Lamé.
${}^t C_e$	Operador adjunto al de Lamé.
$C_{ik}$	Tensor principal de movimientos de contorno.
$C^n(\Omega)$	Espacio de las funciones $n$ - continuas en $\Omega$ .
$D$	Distancia entre dos puntos
	Derivada total.
$D(\Omega)$	Espacio de las distribuciones
$D^\alpha$	Derivada $\alpha$ respecto a una variable.
$\underline{D}, \underline{S}$ $\underline{G}, \underline{H}$	Matrices que aparecen en el M.E.C. en la formulación de tensiones.
$E$	Solución fundamental de un operador diferencial.
$f_h, v_h,$ $p_h, \pi_h,$	Distintos operadores entre espacios funcionales.
$G$	Tensor de Galerkin.
	Módulo de rigidez.

$H$	Funcional de FRIEDRICHS.
$H(\Omega)$	Distribución de Heaviside en un dominio .
$J$	Funcional de Hu – Hai – Chang. Jacobiano de una transtormación.
$K(x)$	núcleo de Peano.
$N$	funciones de interpolación.
$P_n$	Polinomios de grado $n$ .
$Q$	Funciones de Legendre de segunda especie. Algebra de convolución. Funcional de Ritz.
$r$	distancia entre dos puntos. Primera coordenada axisimétrica.
$r_i$	Residuo en una iteración $i$ en el método del gradiente conjugado.
$R$	Funcional de Reissner.
$IR$	Espacio de variables reales de dimensión uno.
$S$	Energia complementaria.
$S_1, S_\epsilon$	Superficies que aparecen en el cálculo de movimientos en pun - tos del contorno.
$t$	Vector tensión en un punto del contorno.
$T$	Vector tensión en un punto del contorno.
$T_{ik}$	Tensor característico en la ecuación de Somigliana.
$u$	Vector de movimientos en un punto del dominio.
$U_{ik}$	Tensor característico en la ecuación de Somigliana.
$v_i$	Vector característico en el método del gradiente conjugado.
$V$	Espacio de proyección.
$W_k$	Pesos en una cuadratura de Gauss.
$W$	Espacio de Sobolev.
$x$	Coordenadas de un punto.
$X$	Vector de fuerzas de volumen.

$X_h$	Espacio de aproximación.
$Y_h$	Espacio de aproximación.
$z$	Segunda coordenada axisimétrica.

## SIMBOLOS GRIEGOS

$\alpha, \beta$	Constantes características en el método del Gradiente conjugado.
$\gamma$	Variable característica del caso axisimétrico.
$\delta \Omega$	Contorno de un dominio acotado.
$\delta$	Distribución de Dirac.
$\partial^m$	Derivada m – sima de una distribución.
$\Delta$	Lapaciano de una función.
$\epsilon$	Infinitésimo.
$\epsilon_{ij}$	Tensor de deformaciones
$\epsilon_{ij}^p$	Tensor de deformaciones plásticas
$\epsilon_{ijk}$	Indice de permutación.
$\xi, \eta$	Coordenadas intrínsecas.
$\lambda$	Número de puntos de Gauss.
$\nu$	Normal al contorno. Módulo de Poisson.
$\psi, \phi, \zeta$	Distintas funciones.
$\chi$	Tensor de Galerkin.
$\sigma$	Tensor de tensiones.
$\sigma^m$	Función salto de grado m.
$\Sigma$	Sumatorio Espacio de funciones.
$\theta$	Angulo. Distribución de temperatura.

$\Omega$	Dominio acotado.
$\Omega_\epsilon$	Dominio acotado menos una bola de radio $\epsilon$ .

## OTRCS SIMBOLOS

$\nabla \cdot$	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergencia.
$\in$	Pertenece a un
$\cup$	Unión de conjuntos.
$\cap$	Intersección de conjuntos.
$\  \cdot \ $	Norma o seminorma de un elemento de un espacio normado ó seminormado.

## 1.- CONCEPTOS BASICOS

Con este capítulo se pretende establecer el lenguaje que se utilizará en los capítulos posteriores así como los problemas que deberán resolverse en ellos. En un primer apartado se recopilan los principios energéticos que sirven de base en la teoría lineal de la elasticidad para los planteamientos numéricos, mientras que en el segundo se recuerda la existencia y unicidad de la solución a través del teorema de LAX - MILGRAM así como la equivalencia con la minimización de un funcional.

El tercer apartado recuerda los conceptos clásicos de la aproximación numérica concentrándose en el método de GALERKIN que es el que informa la filosofía básica del método de los elementos finitos y de los elementos de contorno cuyo desarrollo formal se presenta en los dos apartados siguientes.

El paso básico del método de los elementos de contorno y el cálculo de la solución fundamental, se desarrolla a continuación apoyándose en la teoría de distribuciones así como el resto de la formulación pertinente.



### I.1.- PRINCIPIOS VARIACIONALES

Como es bien sabido la mayoría de los métodos operativos en elasticidad se articulan alrededor del establecimiento de las condiciones de equilibrio ó compatibilidad= mediante una relación conocida como "principio de los trabajos virtuales".

A partir de un sistema en equilibrio de tensiones  $\underline{\sigma}$ , y fuerzas por unidad de volumen  $\underline{X}$  y tensiones en el contorno  $\underline{T}^v$  que cumplen

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0$$

$$\sigma_{ij} v_j = T_i^v \quad \text{I.1.1}$$

y mediante otro sistema compatible de deformaciones  $\underline{\epsilon}^*$  congruente con movimientos  $\underline{u}^*$ , de modo que

$$2 \epsilon_{ij}^* = u_{i,j}^* + u_{j,i}^* \quad \text{I.1.2}$$

Se establece, sobre un dominio  $\Omega$  con contorno  $\delta \Omega$ ,

- Principio de los trabajos virtuales -

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* = \int_{\Omega} X_i u_i^* + \int_{\delta \Omega} T_i^v u_i^* \quad \text{I.1.3}$$

sistema en equilibrio

sistema compatible

A la expresión I.1.3 se puede llegar multiplicando la primera ecuación de la expresión I.1.1 por  $u_i^*$  e integrando por partes para, finalmente aplicar la segunda - ecuación de la expresión I.1.1 y la definición de la expresión I.1.2.

La expresión 1.1.3 es pues una tautología en el sentido de que presenta exactamente la misma información que la expresión 1.1.1 y 1.1.2, pero su carácter integral la hace muy indicada para planteamientos globales y, en particular, para métodos numéricos como más adelante se verá.

En libros de texto la ecuación 1.1.3 se suele representar especializandola en los llamados principio de los desplazamientos virtuales y principio de las tensiones virtuales.

Para el primero se supone que la solución en movimientos es  $\underline{u}$  con lo que la expresión anteriormente mencionada será cierta si se sustituye  $\underline{u}^*$  por  $\underline{u}$  y  $\underline{\epsilon}^*$  por la correspondiente  $\underline{\epsilon}$ . Se imagina ahora un campo  $(\underline{u} + \delta \underline{u}; \underline{\epsilon} + \delta \underline{\epsilon})$  que sea compatible con las condiciones de contorno (lo que supone una restricción) y al aplicar la ecuación 1.1.3 de nuevo y restar de la expresión previa se obtiene

- Principio de los desplazamientos virtuales -

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \int_{\Omega} X_i \delta u_i + \int_{\delta \Omega_{\sigma}} \overset{v}{T}_i \delta u_i \quad 1.1.4$$

Observese que la integral de contorno se refiere solamente a la zona en que no se conocen los movimientos, pues en el resto  $\delta \underline{u} = 0$ .

Por un procedimiento recíproco se puede obtener el principio de las tensiones virtuales estableciendo la ecuación 1.1.3 en dos estados: el real  $(\underline{\sigma}; \underline{X}; \overset{v}{T}; \underline{u}; \underline{\epsilon})$  y otro variado en el que se sustituye  $\underline{\sigma}$  por otro campo  $\underline{\sigma} + \delta \underline{\sigma}$  en equilibrio con  $\underline{X}$  y  $\overset{v}{T}$ . Restando ambas expresiones se consigue

- Principio de las tensiones virtuales -

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} = \int_{\delta \Omega_u} u_i \delta \sigma_{ij} v_j \quad 1.1.5$$

Observese que la integral de contorno se refiere ahora a la zona en que se encuentran especificados los movimientos.

Los principios anteriores no expresan mas que las condiciones de equilibrio y compatibilidad sin referencia a ninguna ley de comportamiento específica. Otra serie de principios del mayor interés se obtiene cuando se hace la hipótesis lineal

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad 1.1.6$$

donde, en general, las  $C_{ijkl}$  son funciones acotadas de  $\underline{x} \in \bar{\Omega}$ , generalmente constantes (cuerpo homogéneo) o constantes por trozos (cuerpo heterogéneo). Extendiéndose la situación del caso isótropo se supone que la forma cuadrática correspondiente a la expresión 1.1.6 es definida positiva, esto es, existe  $C_0 > 0$  tal que

$$2 W(\epsilon) = C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq C_0 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon_{ij} \\ \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad 1.1.7$$

La variación de la expresión 1.1.7 es la derivada de GÂTEAUX

$$\delta W[\underline{\epsilon}(\underline{u})] = \frac{d}{dt} W[\underline{\epsilon}(\underline{u} + t \delta \underline{u})] \Big|_{t=0} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{u}) \epsilon_{ij}(\delta \underline{u}) \quad 1.1.8$$

$$\delta W = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad 1.1.8$$

por lo que el principio de la expresión 1.1.4 se escribe

$$\delta \left\{ \int_{\Omega} W - \int_{\Omega} \underline{X} \cdot \underline{u} - \int_{\delta \Omega_{\sigma}} \underline{T} \cdot \underline{u} \right\} = 0 \quad 1.1.9$$

Se define ahora la energia potencial como

$$\Phi(\underline{u}) = \int_{\Omega} W(\underline{\epsilon}) - \int_{\Omega} \underline{X} \cdot \underline{u} - \int_{\delta \Omega_{\sigma}} \underline{T} \cdot \underline{u} \quad 1.1.10$$

con lo que la expresi3n 1.1.9 indica

$$\delta \Phi = 0 \quad 1.1.11$$

es decir el funcional  $\Phi(\underline{u})$  pasa por un punto estacionario cuando  $\underline{u}$  es la soluci3n del problema

Que este punto es un m3nimo se descubre calculando

$$\Phi(\underline{u} + \delta \underline{u}) - \Phi(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl}$$

y aplicando la condicion de la expresi3n 1.1.7

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} \geq \frac{1}{2} C_0 \int_{\Omega} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} = 0$$

Asi pues:

- Principio de la energia potencial m3nima -

La soluci3n  $\underline{u}$  del problema el3stico hace m3nimo al funcional

$$\emptyset(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \int_{\Omega} X_i u_i - \int_{\delta \Omega_t} T_i^v u_i \quad \text{I.1.12}$$

en el conjunto de los campos de movimientos geoméricamente admisibles.

Este principio de mínimo puede transformarse ahora en un principio de máximo siguiendo el método de FRIEDRICHS (1929) y, de camino, sirve para obtener los llamados principios híbridos de WASHIZU ó REISSNER.

Si imaginamos la ecuación I.1.2 como una relación a cumplir, ya  $\underline{\epsilon}$  y  $\underline{u}$  independientes, a efectos de una posible variación, el funcional (expresión I.1.12), pasaría a depender de  $\underline{\epsilon}$  y de un multiplicador de Lagrange  $\underline{\lambda}$  a determinar. Lo mismo podría pensarse de la condición de compatibilidad en la zona de contorno con movimientos prescritos

$$u_i = y_i \quad \text{en} \quad \delta \Omega_u \quad \text{I.1.13}$$

Siguiendo a FRIEDRICHS podría escribirse el funcional

$$H(\underline{u}, \underline{\epsilon}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \int_{\Omega} \frac{C_{ijkl}}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \int_{\Omega} \lambda_{ij} \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] - \int_{\Omega} F_i u_i - \int_{\delta \Omega_t} T_i^v u_i + \int_{\delta \Omega_u} \mu_i (y_i - u_i)$$

I.1.14

Si buscamos el valor estacionario de H respecto a  $\underline{u}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{\lambda}$  y  $\underline{\mu}$  se obtiene

$$\delta H = \int_{\Omega} (C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \lambda_{ij}) \delta \epsilon_{ij} - \int_{\Omega} \lambda_{ij} \delta u_{i,j} + \int_{\Omega} \delta \lambda_{ij} \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] -$$

$$- \int_{\Omega} F_i \delta u_i - \int_{\delta \Omega_t} \bar{T}_i^v \delta u_i - \int_{\delta \Omega_u} \mu_i \delta u_i + \int_{\delta \Omega_{\mu}} \delta \mu_i (y_i - u_i) \quad 1.1.15$$

y como

$$\int_{\Omega} \lambda_{ij} \delta u_{i,j} = \int_{\Omega} (\lambda_{ij} \delta u_i)_{,j} - \int_{\Omega} \lambda_{ij,j} \delta u_i = \int_{\delta \Omega_t + \delta \Omega_u} \lambda_{ij} v_j \delta u_i - \int_{\Omega} \lambda_{ij,j} \delta u_i$$

$$\delta H = \int_{\Omega} (C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \lambda_{ij}) \delta \epsilon_{ij} - \int_{\Omega} (\lambda_{ij,j} + F_i) \delta u_i + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \right] \delta \lambda_{ij} +$$

$$+ \int_{\delta \Omega_t} (\lambda_{ij} v_j - \bar{T}_i^v) \delta u_i + \int_{\delta \Omega_u} (\lambda_{ij} v_j - \mu_i) \delta u_i + \int_{\delta \Omega_{\mu}} (y_i - u_i) \delta \mu_i \quad 1.1.16$$

con lo que las condiciones de estacionaridad, son además de las expresiones 1.1.12 y 1.1.13

$$\lambda_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{en } \Omega$$

1.1.17

$$\lambda_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} v_j &= T_i^v & \text{en } \delta \Omega_t \\ \mu_i &= \lambda_{ij} v_j & \text{en } \delta \Omega_\mu \end{aligned} \quad 1.1.17$$

que produce la identificación inmediata

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \sigma_{ij} \\ \mu_i &= T_i^v & \text{en } \Omega_\eta \end{aligned} \quad 1.1.18$$

Haciendo las sustituciones pertinentes en la expresión 1.1.14 se obtiene el funcional de HU - HAI - CHANG (1955) y WASHIZU (1955).

$$\begin{aligned} J(\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - F_i u_i \right] - \\ &- \int_{\delta \Omega_t} T_i^v u_i + \int_{\delta \Omega_u} \sigma_{ij} v_j (y_i - u_i) \end{aligned} \quad 1.1.19$$

De este funcional, de enorme generalidad, se pueden obtener, al expresar su variación primero, todas las condiciones sobre  $\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\tau}$ , condiciones de contorno etc, (pasta deshacer el proceso de construcción).

En el caso de la elasticidad lineal

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

1.1.20

$$\epsilon_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl}$$

que al ser sustituidas en la expresión 1.1.19 conducen al funcional de REISSNER - HELLINGER (1950 - 1914):

$$R(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \int_{\Omega} F_i u_i - \int_{\delta\Omega_t} T_i^v u_i + \int_{\delta\Omega_u} \sigma_{ij} v_j (y_i - u_i) \quad 1.1.21$$

El punto crítico de este funcional no es un extremo sino un punto como puede demostrarse. (Nečas - Hlaváček, 1981).

El principio de máximo correspondiente al mínimo de la energía potencial se obtiene invirtiendo la primera de la expresión 1.1.17 como

$$\epsilon_{ij} = a_{ijkl} \lambda_{kl} \quad 1.1.22$$

donde la forma cuadrática correspondiente a las  $a_{ijkl}$  tiene evidentemente las mismas propiedades que las de las  $C_{ijkl}$ .

Como, además una integración por partes conduce a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) = - \int_{\Omega} \lambda_{ij,j} u_i + \int_{\delta\Omega} \lambda_{ij} v_j u_i \quad 1.1.23$$



la sustitución de las expresiones I.1.22 y I.1.23 así como las I.1.17 en la ecuación I.1.14 conduce a transformar el funcional  $H(\underline{\varepsilon}, \underline{u}, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$  en

$$S_1(\underline{\sigma}) = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \int_{\delta \Omega_u} u_i \sigma_{ij} v_j \quad \text{I.1.24}$$

Que el punto crítico es un máximo se desprende de la construcción heurística del funcional  $S_1(\underline{\sigma})$  pero puede demostrarse en forma rigurosa (Nečas - Hlaváček, 1981).

Para obtener un mínimo basta definir la energía complementaria como

$$S(\underline{\sigma}) = - S_1(\underline{\sigma}) \quad \text{I.1.25}$$

y así

± Principio de la energía complementaria mínima -

La solución  $\underline{\sigma}$  del problema elástico hace mínimo al funcional

$$S(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \int_{\delta \Omega_u} u_i \sigma_{ij} v_j \quad \text{I.1.26}$$

en el conjunto de los campos de tensión estáticamente admisibles.

Finalmente una relación de reciprocidad interesantísima se obtiene tomando dos estados  $(\underline{\sigma}, \underline{X}, \underline{T}, \underline{u}, \underline{\epsilon})$  y  $(\underline{\sigma}^*, \underline{X}^*, \underline{T}^*, \underline{u}^*, \underline{\epsilon}^*)$  y estableciendo la expresión 1.1.3 entre los campos cruzados. Se tiene así

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* = \int_{\Omega} X_i u_i^* + \int_{\delta \Omega} \overset{v}{T}_i u_i^* \quad 1.1.27$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} = \int_{\Omega} X_i^* u_i + \int_{\delta \Omega} \overset{v}{T}_i^* u_i$$

Pero los primeros miembros son iguales en función de las relaciones de la expresión 1.1.20 y por tanto

$$\int_{\Omega} X_i u_i^* + \int_{\delta \Omega} \overset{v}{T}_i u_i^* = \int_{\Omega} X_i^* u_i + \int_{\delta \Omega} \overset{v}{T}_i^* u_i \quad 1.1.28$$

que es conocido como teorema de MAXWELL - BETTI.

## 1.2.- SOLUCIONES DEBILES

El cálculo abstracto de variaciones en espacios de Hilbert permite dotar a los resultados clásicos previos de todo el rigor del análisis funcional moderno. El espacio en el que se trabaja está caracterizado por el hecho de que las derivadas primeras de los movimientos  $\underline{u}$  son de cuadrado integrable.

Estrictamente hablando ello solo es cierto para las deformaciones  $\epsilon_{ij}$ , pero la desigualdad de KORN

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(\underline{u}) \epsilon_{ij}(\underline{u}) \geq c \|\underline{u}\|_{1,2}^2 \quad 1.2.1$$

permite trabajar con la norma engendrada por el producto escalar

$$(\underline{u}, \underline{v})_1 = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} D^{\alpha} u_i D^{\alpha} v_i \quad 1.2.2$$

típico del espacio de SOBOLEV.

$$W = [W^{1,2}(\Omega)]^3$$

es decir

$$\|\underline{u}\|_{1,2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{1,2}^2} \quad 1.2.3$$

donde

$$\|u_i\|_{1,2} = (u_i, u_i)_1 \quad 1.2.4$$

Se exige así que  $\Omega$  sea un dominio con contorno de LIPSCHITZ y, en el caso isótropo, que los coeficientes de LAME  $\lambda, \mu$  sean funciones medibles y acotadas

$$\lambda, \mu \in L_{\infty}(\Omega)$$

El contorno se define como

$$\delta \Omega = \delta \Omega_{\sigma} \cup \delta \Omega_u \cup R$$

donde  $R$  es de medida nula y tanto  $\delta \Omega_{\sigma}$  como  $\delta \Omega_u$  son ó bien abiertos en  $\delta \Omega$  ó bien vacíos (segun se trate del problema elástico, primero, segundo ó mixto).

Se define el conjunto  $K$  como

$$K = \left\{ \psi \in C^1(\bar{\Omega}) \mid \text{sop } \psi \subset \Omega \cup \delta \Omega_{\sigma} \right\} \quad 1.2.5$$

Tomando el cierre de  $K$  en la topología de  $W^{1,2}(\Omega)$  y escribiendo  $V = [\bar{K}]^3$  - se tiene

$$\overset{o}{W}_D \subset V \subset W \quad 1.2.6$$

donde

$$\overset{o}{W}_D = \left[ \overset{o}{W}_D^{1,2}(\Omega) \right]^3 \quad 1.2.7$$

y  $\overset{o}{W}_D^{1,2}$  es

$$\overset{o}{W}_D^{1,2}(\Omega) = \overline{ID(\Omega)} \quad 1.2.8$$

siendo  $ID(\Omega)$  el espacio de las funciones con soporte compacto.

El espacio  $V$  es un espacio de HILBERT al igual que el  $W$  y es llamado el espacio de las funciones de ensayo.

Supongamos que las fuerzas por unidad de volumen son  $\underline{X} \in [L_2(\Omega)]^3$  y las tensiones en el contorno  $\underline{T} \in [L_2(\delta\Omega_\sigma)]^3$  así como que existe una función  $\underline{u}_0 \in W$  que determina los movimientos en  $\delta\Omega_u$  en el sentido de su traza.

Con estas condiciones se establece la siguiente definición:

La función  $\underline{u} \in W$  es una solución débil del programa elástico si  $\underline{u} - \underline{u}_0 \in V$

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla \underline{u} \cdot \nabla \underline{v} + 2 \mu \epsilon_{ij}(\underline{u}) \epsilon_{ij}(\underline{v}) = \int_{\Omega} X_i v_i + \int_{\delta\Omega_\sigma} T_i^v v_i \quad \underline{v} \in V \quad 1.2.9$$

Como se ve basta hacer  $\delta \underline{u} \equiv \underline{v} \in V$  para observar que el principio de los trabajos virtuales es un ejemplo de planteamiento de la solución débil.

Por otro lado puede demostrarse que todo funcional

$$\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

(donde  $H$  es un espacio de Hilbert), coercitivo y débilmente semicontinuo inferiormente alcanza su mínimo en  $H$ . Estas propiedades son fáciles de demostrar para la energía potencial.

$$\Phi(\underline{u}) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \lambda \theta^2(\underline{u}) + \mu \epsilon_{ij}(\underline{u}) \epsilon_{ij}(\underline{u}) \right] - \int_{\Omega} F_i u_i - \int_{\delta\Omega_\sigma} T_i^v u_i \quad 1.2.10$$

pero la derivada de  $\hat{G}$ ATEAUX de  $\emptyset$  se anula cuando se cumple la ecuación 1.2.10. Así pues el mínimo es una solución débil. La recíproca se demuestra a través del teorema de LAX - MILGRAM que establece la unicidad de la solución débil.

- Teorema de LAX - MILGRAM -

Sea  $\underline{u}_0 \in W$ ,  $\underline{x} \in [L_2(\Omega)]^3$ ,  $\underline{T} \in [L_2(\delta\Omega_\sigma)]^3$  y  $\delta\Omega_u \neq 0$ . Si existe  $\mu_0 > 0$  tal que  $(\mu(\underline{x}) \geq \mu_0) \wedge (\lambda(\underline{x}) \geq 0) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$  existe una y solo una solución débil del problema elástico y

$$\|\underline{u}\|_W = c \left( \|\underline{u}_0\|_W + \|\underline{x}\|_{[L_2(\Omega)]^3} + \|\underline{T}\|_{[L_2(\delta\Omega_\sigma)]^3} \right) \quad 1.2.11$$

(Si  $\delta\Omega = \delta\Omega_u$  el último término de la derecha desaparece)

En efecto si  $\underline{u}$  es la solución débil y  $\hat{\underline{u}}$  resulta de minimizar  $\hat{\emptyset}$ , como es débil, por unicidad debe coincidir con aquella.

Vemos pues que la solución del problema puede plantearse de ambas formas.

La conexión con la energía complementaria se puede lograr de la siguiente forma, se define el espacio H de los tensores simétricos

$$H = \left\{ \sigma \in [L_2(\Omega)]^9 / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \right\} \quad 1.2.12$$

y se introduce la forma bilineal

$$(\underline{\sigma}^{(1)}, \underline{\sigma}^{(2)}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{kl}^{(2)} \quad 1.2.13$$

En virtud de las propiedades de los coeficientes  $a_{ijkl}$  y de la compacidad de  $[L_2(\Omega)]^9$ , el espacio  $H$  con la norma  $\sqrt{(\sigma, \sigma)}$  es completo y por tanto espacio de Hilbert con el producto de la expresión 1.1.41.

Se definen igualmente el espacio de los tensores compatibles

$$H_1 = \left\{ \underline{\sigma} \in H / \exists \underline{v} \in V : \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{v}), \forall i, j \right\} \quad 1.2.14$$

y el espacio de los tensores débilmente autoequilibrados

$$H_2 = \left\{ \underline{\sigma} \in H / \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\underline{v}) = 0 \quad \forall \underline{v} \in V \right\} \quad 1.2.15$$

Evidentemente  $H_2$  es el complemento ortogonal de  $H_1$  y éste es subespacio de  $H$ .

Se llama igualmente conjunto de campos de tensiones estáticamente admisibles

a

$$\Sigma = \left\{ \underline{\sigma} \in H / \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\underline{v}) = \int_{\Omega} X_i v_i + \int_{\delta\Omega_{\sigma}} \underline{T}_i^v v_i \quad \forall \underline{v} \in V \right\} \quad 1.2.16$$

Con estas definiciones es fácil probar el teorema de la energía complementaria mínima, también llamado a veces, teorema de CASTIGLIANO - MENABREA.

Supongamos para ello que se cumplen las condiciones del teorema de LAX - MILGRAM, con lo que la existencia y unicidad de la solución  $\underline{u}$  queda garantizada.

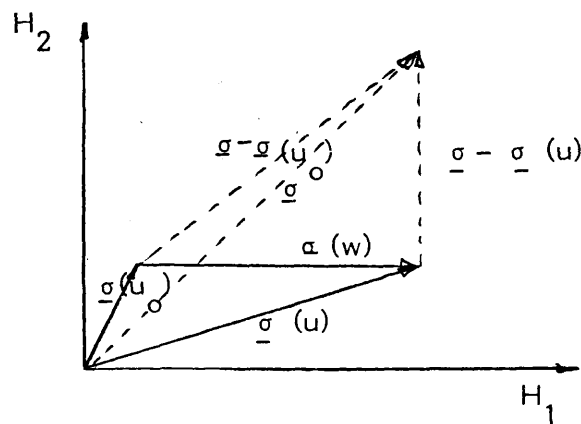
- El funcional energia complementaria -

$$S(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\underline{u}_0) \quad 1.2.17$$

toma su mínimo en  $\Sigma$  tan solo cuando  $\underline{\sigma}$  es el tensor de componentes

$$\sigma_{ij}(\underline{u}) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{u}) \quad 1.2.18$$

Su demostración se realiza mediante el método de las proyecciones ortogonales



$$\text{Sea } \underline{w} = \underline{u} - \underline{u}_0, \quad \underline{w} \in V$$

$$\underline{\sigma}(u) = \underline{\sigma}(u_0) + \underline{\sigma}(w) \quad 1.2.19$$

Por construcción  $\underline{\sigma}(w) \in H_1$ . La definición de solución débil implica  $\underline{\sigma}(u) \in \Sigma$ . Supongamos un  $\underline{\sigma} \in \Sigma$  arbitrario. Evidentemente  $\underline{\sigma} - \underline{\sigma}(u)$  está en  $H_2$  pues se trata de un campo en equilibrio débil con cero cargas exteriores. Por tanto si llamamos



$$J(\underline{\sigma}) = \left\| \underline{\sigma} - \underline{\sigma}(\underline{u}_0) \right\|_H^2 = \left\| \underline{\sigma} - \underline{\sigma}(\underline{u}) + \underline{\sigma}(\underline{u}) - \underline{\sigma}(\underline{u}_0) \right\|_H^2 \quad 1.2.20$$

tendremos

$$J(\underline{\sigma}) = \left\| \underline{\sigma} - \underline{\sigma}(\underline{u}) \right\|_H^2 + \left\| \underline{\sigma}(\underline{u}) - \underline{\sigma}(\underline{u}_0) \right\|_H^2 \quad 1.2.21$$

de modo que el mínimo solo se alcanza cuando

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{u})$$

Pero

$$J(\underline{\sigma}) = \left\| \underline{\sigma} \right\|_H^2 + \left\| \underline{\sigma}(\underline{u}_0) \right\|_H^2 - 2(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}(\underline{u}_0)) \quad 1.2.22$$

luego

$$J(\underline{\sigma}) - \left\| \underline{\sigma}(\underline{u}_0) \right\|_H^2 = \int_{\Omega} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - 2 \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\underline{u}_0) = 2S(\underline{\sigma}) \quad 1.2.23$$

que demuestra el teorema.

Se plantee pues en movimientos o en tensiones la solución del problema elástico puede establecerse como la búsqueda del mínimo de un funcional y ello explica la importancia que los llamados métodos variacionales directos, nombre que según MIKHLIN se debe a SCBOLEV, tienen en la resolución numérica de problemas concretos.

### I.3.- SOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA ELASTICO

En forma simbólica (GAVURIN, 1973) los métodos numéricos sustituyen la solución del problema

$$A u = f \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & Y \\ u & \xrightarrow{A} & f \end{array} \quad 1.3.1$$

por otro

$$A_h u_h = f_h \quad 1.3.2$$

donde  $A_h$  aproxima  $A$  y

$$\begin{array}{ccc} X_h & \xrightarrow{A_h} & Y_h \\ u_h & \xrightarrow{A_h} & f_h \end{array}$$

En general (TEMAM, 1973) existen varios procedimientos para aproximar un espacio normado  $X$  mediante una familia  $\{X_h\}_{h \in H}$  de espacios normados, en general diferentes del anterior.

A saber:

a) Se puede comparar  $u$  con la imagen  $p_h u_h$  de  $u_h$  en  $X$ , siendo  $p_h$  un operador que aplica  $X_h$  en  $X$ .

b) Se compara la imagen  $\Pi(u)$  de  $u$  en un tercer espacio  $F$  con la imagen  $p_h u_h$  de  $u_h$  en  $F$ , siendo  $\Pi$  y  $p_h$  las respectivas aplicaciones de  $X$  y  $X_h$  en  $F$ .

c) Se compara  $u_h$  con una cierta imagen  $r_h u$  de  $u$  en  $X_h$  siendo  $r_h$  un operador que aplica  $X$  en  $X_h$ .

El caso a) recibe el nombre de aproximación interna, y el b) de aproximación externa. El caso c) solo reviste interés auxiliar.

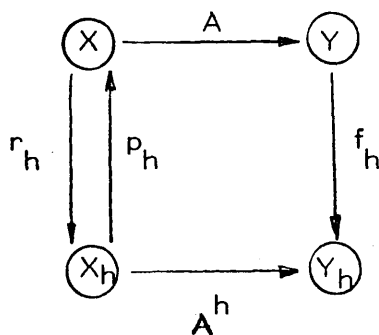
En los casos de aproximación interna la triada  $\{X_h, P_h, r_h\}$  está formada por un espacio normado  $X_h$ , generalmente de dimensión finita y dos operadores lineales continuos:  $p_h$  que generalmente es inyectivo y  $r_h$  que es sobreyectivo; el primero se llama operador de prolongación y el segundo de restricción, siendo obvias ambas apelaciones. La aplicación  $p_h$  ó  $r_h$  de  $X$  en sí mismo se llama truncamiento.

En consecuencia se definen

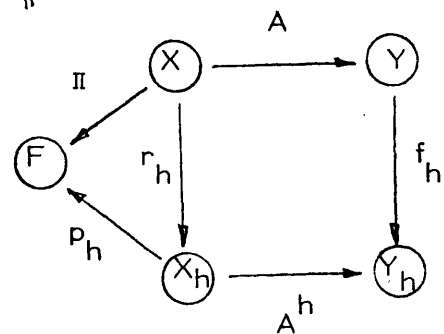
error  $: \| u - p_h u_h \|$

error de discretización  $: \| u_h - r_h u_h \|_h$

error de truncamiento  $: \| u - p_h r_h u \|$



APROXIMACION INTERNA



APROXIMACION EXTERNA

Fig. 1.2.1

En forma análoga (Fig. 1.3.1) para una aproximación externa se definen

$$\text{error} \quad : \quad \| \Pi u - p_h u_h \|_F$$

$$\text{error de discretización} \quad : \quad \| u_h - v_h u \|_h$$

$$\text{error de truncamiento} \quad : \quad \| \Pi u - p_h r_h \|_F$$

Los métodos más interesantes para espacios separables son los de GALERKIN que se caracterizan por estar  $h \in \mathbb{TN}$  y ser  $p_h$  la inyección canónica de  $X_h$  en  $X$  y  $r_h$  la proyección ortogonal de  $X$  en  $X_h$  (sobreyectiva) pudiendo demostrarse la estabilidad y convergencia.

Cuando se trata de espacios normados en general el método de GALERKIN se puede generalizar tomando  $n \in \mathbb{TN}$  y una secuencia  $X_n$  con unión densa en  $X$  tal que

$$\text{Si } u \in X_{n_0} \quad \begin{cases} r_n u = 0 & \text{si } n \leq n_0 \\ r_n u = u & \text{si } n \geq n_0 \end{cases} \quad 1.3.3$$

puesto que, claramente

$$p_n \quad r_n \quad u \longrightarrow u \quad \forall u \in \bigcup_{n \in \mathbb{TN}} (X_n)$$

El operador  $r_n$  solo esta definido en  $K = \bigcup_{n \in \mathbb{TN}} (X_n)$



pero como  $K$  es denso en  $X$  es posible conseguir la situación de convergencia y estabilidad.

En el caso de los espacio  $X$  separables se toman como subespacios  $X_h$  los generados por secuencias  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_h$  con lo que

$$u_h = \sum_{j=1}^h a_j^h \psi_j^h \quad a_j^h \in \mathbb{R} \quad 1.3.4$$

Si  $A_h$  en la expresión 1.3.2 es la restricción de  $A$  en  $X_h$ , la proyección se -  
ría

$$(A_h u_h, v) = (f_h, v) \quad \forall v \in X_h \quad 1.3.5$$

donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto escalar definido en  $X_h$ .

Evidentemente la expresión 1.3.5 es equivalente a

$$(A_h u_h, \psi_i) = (f_h, \psi_i) \quad i = 1, 2, \dots, h \quad 1.3.6$$

o lo que es igual siendo  $A_h$  lineal, al sistema

$$\sum_{j=1}^h a_j^h (A_h \psi_j^h, \psi_i) = (f_h, \psi_i) \quad i = 1, 2, \dots, h \quad 1.3.7$$

La equivalencia de la expresión 1.3.5 con la formulación débil es evidente -  
pero también es posible una interpretación de RITZ, como minimización de un funcio -  
nal.

Si el funcional continuo  $\emptyset$  alcanza su mínimo en un punto  $u$  de un espacio de Hilbert, se llama secuencia minimizante a  $u_n$  si  $u_n \in H$  y si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \emptyset(u_n) = \emptyset(u) \quad 1.3.8$$

El método de RITZ implica la construcción de una secuencia en forma análoga a la de GALERKIN esto es, se forman los subespacios  $X_h \subset X$  ( $h = 1, 2, \dots$ ) de modo que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} X_h = X \Rightarrow \forall u \in X \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \text{dist}(u, X_h) = 0 \quad 1.3.9$$

Como elementos de la secuencia minimizante se toman los  $u_h \in X_h$  tales que

$$\emptyset(u_h) = \min_{u \in X_h} \emptyset(u) \quad 1.3.10$$

Que  $\{u_h\}_{h=1}^{\infty}$  es una secuencia minimizante está claro.

Si  $u$  es el elemento que hace mínimas a  $\emptyset$  en  $X$ , como consecuencia de la expresión 1.3.9 existe  $v_h \in X_h$ ,  $v_h \rightarrow u$ . Por continuidad

$$\emptyset(v_h) \rightarrow \emptyset(u) \quad 1.3.11$$

y por la condición 1.3.10

$$\emptyset(v_h) \geq \emptyset(u_h) \geq \emptyset(u)$$

1.3.12

por lo que  $\emptyset(u_h) \rightarrow \emptyset(u)$

En el caso de la energía potencial en el problema elástico la condición conduce al mismo sistema GALERKIN (basta sustituir la condición  $A(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in X_h$  en la expresión mínimo  $\emptyset = \frac{1}{2} (A(u_h; u_h) - (f, u_h))$ ).

- El método de los elementos finitos -

Es exactamente un método de RITZ - GALERKIN en el que

$$X_h = \left\{ v/v = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j^h, P_j \in \Omega, a_j \text{ real} \right\} \quad 1.3.13$$

(Vease que  $X_h \subset W_o^{1,2}(\Omega)$ )

donde  $P_j$  son los vertices de una triangulación del dominio y  $\psi_j^h$  son funciones básicas de pequeño soporte que en el caso de interpolación lineal se definen como.

$$\psi_j^h(P_h) = \delta_{jh} \quad 1.3.14$$

Debido a la simetría de la matriz  $(A_h \psi_i^h, \psi_j^h)$  y al pequeño soporte de las funciones, el tratamiento numérico del problema resultante es muy efectivo.

#### I.4.- FORMULACION MATRICIAL DE LOS METODOS DE ELEMENTOS FINITOS

Existen fundamentalmente tres posibilidades de acuerdo con el siguiente esquema:

a).- El mínimo de la energía potencial conduce al método de los elementos finitos en movimientos.

b).- El mínimo de la energía complementaria conduce al método de los elementos finitos en tensiones.

c).- El punto estacionario del principio de Reissner conduce a los métodos híbridos.

En el primer caso se escribe la relación 1.1.12 como

$$\phi(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}^T \underline{C} \underline{\epsilon} - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{X} - \int_{\delta \Omega_t} \underline{u}^T \underline{v} \quad 1.4.1$$

o bien, si

$$\underline{\epsilon} = \underline{D} \underline{u}$$

$$\phi(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{D}^T \underline{u})^T \underline{C} \underline{D} \underline{u} - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{X} - \int_{\delta \Omega_t} \underline{u}^T \underline{v} \quad 1.4.2$$

El carácter integral de las relaciones permite sustituir la expresión 1.4.5 por relaciones sobre dominios parciales o elementos y su posterior adición.



Si se hace la hipótesis de interpolación

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\Delta} \quad 1.4.3$$

donde  $\underline{N}$  son las funciones básicas de forma (o interpolación) y  $\underline{\Delta}$  los parámetros de la discretización

$$\Phi(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{D} \underline{N})^T \underline{C} \underline{D} \underline{N} \underline{\Delta} - \Delta^T \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{X} - \Delta^T \int_{\delta \Omega_t} \underline{N}^T \underline{v} \quad 1.4.4$$

y por tanto el sistema de ecuaciones es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\Delta}} = 0 = \underline{K} \underline{\Delta} - \underline{F} \quad \underline{K} \underline{\Delta} = \underline{F} \quad 1.4.5$$

donde llamamos

$$\underline{K} = \int_{\Omega} (\underline{D} \underline{N})^T \underline{C} (\underline{D} \underline{N}) \quad \text{matriz de rigidez.} \quad 1.4.6$$

$$\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{X} + \int_{\delta \Omega_t} \underline{N}^T \underline{v} \quad \text{vector de fuerzas nodales}$$

En el segundo caso la energía complementaria expresión 1.1.26 se escribe

$$S(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{A} \underline{\sigma} - \int_{\delta \Omega_u} \underline{u}^T \underline{\sigma} \underline{v} \quad 1.4.7$$

La hipótesis de discretización es

$$\underline{\sigma} = \underline{Z} \underline{P} \quad 1.4.8$$

donde  $\underline{P}$  son fuerzas nodales de las que están excluidas las reacciones asociadas con un sistema de apoyo isostático.

Además

$$\underline{\sigma} \quad \underline{v} = \underline{L} \underline{P} \quad 1.4.9$$

que en general es difícil de obtener.

Con estas hipótesis

$$S(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{P}^T \left[ \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \right] \underline{P} - \underline{P}^T \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{u} \quad 1.4.10$$

con lo que, al derivar, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{P}} = 0 = \left[ \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \right] \underline{P} - \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{u}$$

o bien

$$\underline{IF} \cdot \underline{P} = \underline{Z} \quad 1.4.11$$

donde se ha llamado

$$\underline{IF} = \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \quad \text{matriz de flexibilidad} \quad 1.4.12$$

$$\underline{Z} = \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{u} \quad \text{vector de movimientos nodales} \quad 1.4.12$$

En el tercer caso el principio de Reissner se escribe

$$R(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{D} \underline{u} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{A} \underline{\sigma} - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{F} - \int_{\delta \Omega_t} \underline{v}^T \underline{u} + \int_{\delta \Omega_u} \underline{v}^T \underline{y} - \int_{\delta \Omega_u} \underline{v}^T \underline{u} \quad 1.4.13$$

en el que las variables básicas son  $\underline{u}$  y  $\underline{\sigma}$ . Su discretización implica dos hipótesis

$$\underline{\sigma} = \underline{Z} \underline{P} \quad 1.4.14$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\Delta}$$

donde  $\underline{P}$  y  $\underline{\Delta}$  son los parámetros de discretización

Otra relación auxiliar es

$$\underline{T}^v = \underline{L} \underline{P} \quad (\underline{T}_i^v = \sigma_{ij} v_j) \quad 1.4.15$$

La introducción de las expresiones 1.4.14 y 1.4.15 en la expresión 1.4.13 permite escribir.

$$\begin{aligned}
 R(\underline{u}, \underline{\sigma}) = R(\underline{\Delta}, \underline{P}) &= \underline{P}^T \left( \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{D} \underline{N} \underline{\Delta} - \frac{1}{2} \underline{P}^T \left( \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \right) \underline{P} - \right. \\
 &\quad \left. - \underline{\Delta}^T \left( \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{F} \right) - \left( \int_{\delta \Omega_t} \underline{v}^T \underline{N} \right) \underline{\Delta} + \underline{P} \left( \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{y} \right) - \underline{P} \left( \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{N} \right) \underline{\Delta} \right. \\
 &\quad \left. \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.4.16}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 R(\underline{\Delta}, \underline{P}) &= \underline{P}^T \left[ \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{D} \underline{N} - \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{N} \right] \underline{\Delta} - \frac{1}{2} \underline{P}^T \left[ \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \right] \underline{P} - \\
 &\quad - \left[ \int_{\Omega} \underline{F}^T \underline{N} + \int_{\delta \Omega_t} \underline{v}^T \underline{N} \right] \underline{\Delta} + \underline{P}^T \left( \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{y} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.4.17}$$

LLamando

$$\begin{aligned}
 \underline{\Omega}_{11} &= \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{A} \underline{Z} \\
 \underline{\Omega}_{12} &= \int_{\Omega} \underline{Z}^T \underline{D} \underline{N} - \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{N} \\
 \underline{F}_{eq} &= \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{F} + \int_{\delta \Omega_t} \underline{N}^T \underline{v} \\
 \underline{\Omega}_{eq} &= \int_{\delta \Omega_u} \underline{L}^T \underline{y}
 \end{aligned}
 \tag{1.4.18}$$

# CONCEPTOS BASICOS 1.4

y escribiendo la variación respecto a  $\underline{\Delta}$  y  $\underline{P}$

$$0 = \underline{P}^T \underline{\Omega}_{12} \delta \underline{\Delta} + \delta \underline{P}^T \underline{\Omega}_{12} \underline{\Delta} - \underline{P}^T \underline{\Omega}_{11} \delta \underline{P} - \underline{F}_{eq}^T \delta \underline{\Delta} + \delta \underline{P}^T \underline{\Delta}_{eq}$$

1.4.19

o bien

$$\underline{P}^T \underline{\Omega}_{12} - \underline{F}_{eq}^T = 0$$

$$\underline{\Omega}_{12} \underline{\Delta} - \underline{\Omega}_{11}^T \underline{P} + \underline{\Delta}_{eq} = 0 \text{ pero } \underline{\Omega}_{11}^T = \underline{\Omega}_{11}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -\underline{\Omega}_{11} & \underline{\Omega}_{12} \\ \underline{\Omega}_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{\Delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\underline{\Delta}_{eq} \\ \underline{F}_{eq} \end{Bmatrix}$$

1.4.20

De la primera ecuación se obtiene

$$\underline{P} = \underline{\Omega}_{11}^{-1} \underline{\Omega}_{12} \underline{\Delta} + \underline{\Omega}_{11}^{-1} \underline{\Delta}_{eq}$$

y de la segunda

$$\underline{F}_{eq} = \underline{\Omega}_{12}^T \underline{\Omega}_{11}^{-1} \underline{\Omega}_{12} \underline{\Delta} + \underline{\Omega}_{12}^T \underline{\Omega}_{11}^{-1} \underline{\Delta}_{eq}$$

o bien

$$\underline{K} \underline{\Delta} = \underline{Q}$$

i.4.21

con

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \Omega_{12}^T & \Omega_{11}^{-1} & \Omega_{12} \end{bmatrix}$$

i.4.22

$$\underline{Q} = \underline{F}_{eq} - \begin{bmatrix} \Omega_{12}^T & \Omega_{11}^{-1} \end{bmatrix} \underline{\Delta}_{eq}$$

en el que  $\underline{\Delta}$  son las incógnitas,  $\underline{Q}$  es conocido y  $\underline{K}$  tiene el significado de una matriz de rigidez que puede incorporarse a los tratamientos clásicos.

En el primer caso se obtiene mayor precisión en las  $\underline{u}$ , en el segundo en las  $\underline{\sigma}$  y en el tercero se presenta como una solución de compromiso. Su importancia es grande sin embargo y, como veremos en el siguiente apartado forma la base del método de los elementos de contorno.

### 1.5.- EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Como es bien sabido en teoría del potencial, debido al principio de máximo, cualquier función armónica  $u(\underline{x})$  que es aproximada uniformemente en el contorno  $\delta\Omega$  de un dominio  $\Omega$  por un polinomio armónico  $\psi(\underline{x})$  también es aproximada por  $\psi(\underline{x})$  en el interior de  $\Omega$ . Dado pues  $f(\underline{x})$  en el contorno  $\delta\Omega$  cabe pensar en la secuencia  $\psi_h(\underline{x})$  que converja a  $f(\underline{x})$  en  $\delta\Omega$  aproxima la solución del problema en  $\Omega$  para condiciones de contorno dadas. BERGMAN y HERRIOT (Numer, Math. 7 (1965) pp 42-65) describen el método como sigue:

a).- Generación de un conjunto completo  $\psi_h$ ,  $h=1,2,\dots$  de soluciones particulares de la ecuación diferencial.

b).- Generación a partir de las  $\psi_h$  de un sistema ortonormal  $\phi_h$ .

c).- Determinación de una solución de la forma  $a_h \phi_h$ . Ideas de este tipo fueron generalizadas por KUPRADZE (80) RIZZO (108) JASWON (70), LACHAT y WATSON (83) a la luz de los métodos de discretización expuestos para el método de los elementos finitos en el apartado anterior.

La relación de partida es el teorema de reciprocidad expresión (1.1.2.4) que puede ser reescrito en la forma

$$\int_{\Omega} \underline{X}^T \underline{u}^* + \int_{\delta\Omega} \underline{T}^T \underline{u}^* = \int_{\Omega} \underline{X}^{*T} \underline{u} + \int_{\delta\Omega} \underline{T}^{*T} \underline{u} \quad 1.5.1$$

Si se escoge como estado auxiliar (\*) el correspondiente a la aplicación de la carga unidad en el espacio infinito la primera integral de volumen del segundo miembro

queda reducida a los valores  $\underline{u}(\underline{p}_i)$  siendo  $\underline{p} \in \Omega$  el punto de aplicación de la carga - unidad. El resultado es conocido como teorema de SOMIGLIANA y establece una fórmula de representación para los movimientos.

$$\underline{u}(\underline{p}_i) = - \int_{\delta\Omega} \underline{T}^{*T} \underline{u} + \int_{\delta\Omega} \underline{T}^T \underline{u}^* + \int_{\Omega} \underline{X}^T \underline{u}^* \quad \underline{p}_i \in \Omega \quad 1.5.2$$

Un proceso de paso al limite y la especificación de los valores principales de las integrales permite escribir

$$\underline{u}(\underline{p}_i) = - \int_{\delta\Omega} \underline{T}^{*T}(\underline{p}_i, \underline{Q}) \underline{u}(\underline{Q}) + \int_{\delta\Omega} \underline{T}^T(\underline{Q}) \underline{u}^*(\underline{p}_i, \underline{Q}) + \int_{\Omega} \underline{X}^T(\underline{q}) \underline{u}^*(\underline{p}_i, \underline{q})$$

$$\underline{p}_i, \underline{Q} \in \delta\Omega \quad 1.5.3$$

$$\underline{p}_i, \underline{q} \in \delta\Omega$$

Observese que la última integral (sobre  $\Omega$ ) no contiene ninguna incógnita del problema por lo que su valor se puede calcular. Es más, en el caso elástico lineal e isótropo, para las sollicitaciones de volumen habituales (peso propio, fuerza centrífuga, temperatura), esa integral se puede transformar en otras de contorno. Está claro pues que en la expresión 1.5.3 sólo aparecen incógnitas en el contorno del dominio - por lo que se puede aplicar la filosofía de BERGMAN y pensar en una aproximación a los valores de contorno. Ello se hace utilizando la filosofía de los elementos finitos híbridos, esto es aproximando tanto  $\underline{u}$  como  $\underline{T}$  y ambos con funciones de pequeño soporte  $\underline{\psi}$   $\underline{\phi}$  respectivamente.

Al poner



$$\underline{u}(Q) = \underline{\psi}^T(Q) \underline{\Delta}$$

$$\underline{T}^v(Q) = \underline{\phi}^T(Q) \underline{P}$$

1.5.4

$$\int_{\Omega} \underline{x}^T(q) \underline{u}^*(p_i, q) = \underline{F}$$

se obtiene

$$\underline{c} \cdot \underline{u}(P_i) + \left[ \int_{\delta \Omega} \underline{\tau}^*(P_i, Q) \underline{\psi}^T \right] \underline{\Delta} = \int_{\delta \Omega} \underline{Z}^*(P_i, Q) \underline{\phi}^T \underline{P} + \underline{F}$$

1.5.5

$\underline{\Delta}$  contiene valores de  $\underline{u}$  en los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_h$  en que se ha discretizado el contorno y por tanto la expresión 1.5.5 es un sistema de ecuaciones

$$\underline{A} \underline{\Delta} = \underline{B} \underline{P} + \underline{F}$$

El procedimiento de cálculo de los elementos de  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  se especifica a lo largo del trabajo. Conviene indicar aquí que el precio pagado por la discretización de tan solo el contorno son matrices llenas y no simétricas pues  $\underline{\psi} \neq \underline{Z}^*$ . La utilidad del uso de las funciones de pequeño soporte queda limitada en este caso a dotar de significado físico a los coeficientes  $\underline{\Delta}$  pues al igual que en el caso de los elementos finitos se cumple la expresión 1.2.14 para el caso lineal, esto es,

$$\psi_j^h(P_h) = \delta_{jh}$$

Aunque en algunos casos (vg: elementos singulares  $\underline{\psi} \neq \underline{\phi}$ ) es costumbre tomar  $\underline{\psi} = \underline{\phi}$  lo que no implica nada respecto a la dependencia funcional de  $\underline{u}$  y  $\underline{T}$  ya que la=

interpolación se realiza independientemente como corresponde al caso de elementos - híbridos.

Una vez conocidos los valores de contorno es evidente que una sustitución en la ecuación 1.5.2 conduce a los valores en los puntos interiores que se desee.

Los detalles técnicos serán expuestos en detalle más adelante.

### 1.6. - TRANSFORMACION DE LA ECUACION DE NAVIER EN UNA ECUACION INTEGRAL A TRAVES DE LA TEORIA DE DISTRIBUCIONES

Como se ha indicado en los apartados anteriores, la base del método de los elementos de contorno se reduce a la transformación de las ecuaciones diferenciales clásicas, que definen el comportamiento del sólido, ya sea en régimen elástico ó elastoplástico, en ecuaciones integrales sobre el contorno del dominio, ó en los casos más desfavorables, a ecuaciones integrales definidas algunas de ellas en el contorno, y el resto en todo el dominio.

Este tratamiento, como se dedujo en 1.2 significa realmente la resolución de las ecuaciones de campo según el sentido de solución débil, ampliamente utilizada en resolución de ecuaciones diferenciales.

Un planteamiento alternativo, elegante y que describe muy bien el tipo de ecuaciones integrales que se consiguen, es mediante el uso de la teoría de convolución de distribuciones, que se desarrollará a continuación.

La ecuación de Navier para el caso elástico, tiene la forma ya conocida

$$\lambda \nabla \times (\nabla \cdot u) + G \nabla \cdot (\nabla \times u) + G \nabla (\nabla \times u)^T = -X \quad \text{en } \Omega \quad 1.6.1$$

Esta expresión puede también ponerse en forma de ecuación funcional como

$$A u = -X \quad \text{en } \Omega \quad 1.6.2$$

donde  $u$  y  $X$  representan funciones tensoriales de primer orden correspondientes a los movimientos y fuerzas de volumen en cada punto del dominio, y  $A$  es un funcional

tensorial también, contravariante de segundo orden que podemos definir como

$$A = \lambda \nabla \times (\nabla \cdot) + G \nabla \cdot (\nabla \times) + G \nabla \cdot (\nabla \times)^T \quad 1.6.3$$

siendo  $\nabla \times$  el operador gradiente y  $\nabla \cdot$  el operador divergencia.

Además de la ecuación 1.6.2, es necesario que se cumplan las condiciones de contorno definidas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{en } \delta \Omega_u \\ t = \sigma \cdot v &= C_e u = \bar{t} && \text{en } \delta \Omega_t \end{aligned} \quad 1.6.4$$

$$\delta \Omega_u \cup \delta \Omega_t = \delta \Omega$$

donde  $C_e$  es el operador de Lamé que permite pasar de movimientos a tensiones en un punto del dominio, y viene definido por la expresión:

$$C_e = \lambda \nabla \cdot (\nabla \cdot) + G \nabla \cdot (\nabla \times) + G \nabla \cdot (\nabla \times)^T \quad 1.6.5$$

y  $\delta \Omega_u$  y  $\delta \Omega_t$  son las partes del contorno del dominio donde se definen las condiciones de contorno en movimientos y tensiones respectivamente. Naturalmente para que el problema esté bien planteado, según el sentido físico usual es preciso que se impongan condiciones de contorno, ya sean esenciales ó naturales, en todos los puntos de éste, por lo que  $\delta \Omega_u \cup \delta \Omega_t = \delta \Omega$ .

En el exterior del dominio los movimientos y tensiones han de ser nulos, por lo que en definitiva la solución de movimientos será una función discontinua en  $\delta \Omega$ .

Realmente si  $u$  es continua y derivable en el interior de  $\Omega$ , como de hecho debe serlo, para garantizar la compatibilidad de movimientos, la solución que tratamos de buscar es la correspondiente a una distribución con soporte en  $\Omega$ , que toma valores iguales a  $u$  en el interior de  $\Omega$  y cero en el exterior. Esta distribución es precisamente  $(H(\Omega) u)$ , donde  $H(\Omega)$  es la distribución de Heaviside definida sobre el dominio, también denominada función característica del dominio  $\Omega$ .

Aplicaremos a continuación el operador  $A$  a la distribución anterior, teniendo en cuenta la expresión de la derivada de una distribución definida en un dominio  $\Omega$ .

$$\partial^m f = D^m f + \sigma^{m-1}(f) \delta + \sigma^{m-2} \delta' + \dots + \sigma^0 \delta^{(m-1)} \quad 1.6.6$$

donde  $\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^m$  son las funciones salto en el contorno  $\delta\Omega$  de la función  $f$  y  $\delta, \delta', \dots, \delta^{m-1}$  son respectivamente la distribución  $\delta$  de Dirac en el contorno y sus sucesivas derivadas.

Con esta expresión, y las definiciones de distribución y derivada de una distribución, podemos calcular el valor de  $A(H(\Omega) u)$  que buscamos. Realizaremos el cálculo de una derivada segunda de esta distribución (que son las de orden más alto en el operador  $A$ ) y posteriormente generalizaremos el resultado a los operadores gradiente y divergencia, para terminar expresando el operador  $A$ . Para ello, tomaremos el convenio de encerrar entre corchetes las distribuciones y entre llaves las funciones, que en nuestro caso serán funciones continuas con primera derivada continua en el interior de  $\Omega$ , es decir funciones  $C^1(\Omega)$ .

La expresión de la derivada segunda de la distribución  $H(\Omega) u$  respecto a

a la coordenada  $x_m$  puede calcularse mediante el concepto usual de derivada de una distribución,

$$([ \partial_m (H(\Omega) u) ] ; v)_{L^2(\Omega)} = - (H(\Omega) u, D_m v)_{L^2(\Omega)} \quad 1.6.7$$

donde  $v$  es una función  $C_0^\infty(\Omega)$ , es decir infinitamente derivable, con derivadas de contorno de todos los ordenes y soporte compacto que contiene a  $\Omega$ .

La derivada segunda de la distribución tiene una forma idéntica

$$([ \partial_m^2 (H(\Omega) u) ] , v)_{L^2(\Omega)} = (-1)^2 (H(\Omega) u, D_m^2 v)_{L^2(\Omega)}$$

donde  $( , )_{L^2(\Omega)}$  es el producto escalar de funciones en el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable, con soporte  $\Omega$ .

Este último valor puede calcularse a partir de la segunda fórmula de Green - como sigue

$$\begin{aligned} (H(\Omega) u, D_m^2 v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u \frac{D_m^2 v}{D x_m^2} d\Omega \\ \int_{\Omega} u \frac{D_m^2 v}{D x_m^2} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{D_m^2 u}{D x_m^2} v d\Omega + \int_{\partial\Omega} (u \frac{Dv}{Dx_m} - \\ &\quad - \frac{Du}{Dx_m}) \cos(v, x_m) ds \end{aligned}$$

donde se han supuesto  $u$  y  $v$  funciones de variable real, y  $\cos(v, x_m)$  representa el coseno del ángulo formado por la normal del contorno en el punto de campo y el eje  $x_m$ .

Recordando que

$$([u]_{\partial \Omega}^2, v)_{L^2(\Omega)} = - \int_{\partial \Omega} u \frac{Dv}{Dx_m} \cos(v, x_m) ds$$

se tiene en definitiva

$$[\partial_m^2 (H(\Omega) u)] = H(\Omega) \left\{ \frac{D^2 u}{Dx_m^2} \right\} - ([u]_{\partial \Omega}^2) - \left[ -\frac{Du}{Dx_m} \delta(\Omega) \right] \cos(vx_m)$$

1.6.8

que es idéntica a la expresión 1.6.6, teniendo en cuenta el valor de las funciones salto en este caso.

Utilizando ahora esta expresión es posible calcular cada uno de los operadores utilizados, así

$$[\nabla \cdot (H(\Omega) u)] = H(\Omega) \left\{ \nabla \cdot u \right\} - [(v \cdot u) \delta(\Omega)]$$

1.6.9

$$[\nabla \times (H(\Omega) u)] = H(\Omega) \left\{ \nabla \times u \right\} - [(v \times u) \delta(\Omega)]$$

y las operaciones de segundo orden es fácil comprobar que quedarían

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \cdot [H(\Omega) u]] &= H(\Omega) \left\{ \nabla \times (\nabla \cdot u) \right\} - \nabla \times [(v \cdot u) \delta(\Omega)] - \\ &- [(v \cdot (\nabla \cdot u)) \delta(\Omega)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times [H(\Omega) u]] &= H(\Omega) \left\{ \nabla \cdot (\nabla \times u) \right\} - \nabla \cdot [(v \times u) \delta(\Omega)] - \\ &- [(v \cdot (\nabla \times u)) \delta(\Omega)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times [(H(\Omega) u)^T]] &= H(\Omega) \left\{ \nabla \cdot (\nabla \times u)^T \right\} - \nabla \cdot [(v \times u)^T \delta(\Omega)] - \\ &- [(v \cdot (\nabla \times u)^T) \delta(\Omega)] \end{aligned}$$

1.6.10

donde  $\delta(\Omega)$  es la distribución de Dirac en la superficie  $\delta\Omega$ .

El hecho de utilizar valores de  $u$  en el contorno, supone que estamos buscando funciones  $u$  en un espacio de Sobolev, o mejor una distribución, como hemos indicado, y no simplemente una función  $L^2(\Omega)$  ya que en este caso  $\delta\Omega$  no tiene sentido pues es un conjunto de medida nula en  $\mathbb{R}^n$ . Estamos pues en busca de la misma solución débil que buscamos en 1.2.

Si ahora introducimos todos los resultados de 1.6.10 en la aplicación del operador  $A$  a la distribución  $(H(\Omega) u)$ , quedará

$$\begin{aligned} [A[H(\Omega) u]] &= [H(\Omega) \left\{ A u \right\}] - \lambda [\nabla \times [(v \cdot u) \delta(\Omega)]] - \\ &- G [\nabla \cdot [(v \times u) \delta(\Omega)]] + G [\nabla \cdot [(v \times u)^T \delta(\Omega)]] - \end{aligned}$$



$$- \lambda [v \cdot (\nabla \cdot u) \delta(\Omega)] - G[v \cdot (\nabla \times u) \delta(\Omega)] + \\ + G[v \cdot (\nabla \times u)^T \delta(\Omega)]$$

1.6.11

y agrupando términos.

$$[A[H(\Omega)u]] = [H(\Omega)\{Au\}] - [{}^t C_e[u \delta(\Omega)]] - [(C_e u) \delta(\Omega)]$$

1.6.12

Teniendo ahora en cuenta que  $\{Au\} = -X$ , si sustituimos en la expresión anterior se tendrá

$$[A[H(\Omega)u]] = -[H(\Omega)\{X\}] - [{}^t C_e[u \delta(\Omega)]] - [(C_e u) \delta(\Omega)]$$

1.6.13

donde los operadores  ${}^t C_e$  y  $C_e$  se definen como

$${}^t C_e = \lambda \nabla \times (v \cdot) + G \nabla \cdot (v \times) + G \nabla \cdot (v \times)^T$$

$$C_e = \lambda v \cdot (\nabla \cdot) + G v \cdot (\nabla \times) + G v \cdot (\nabla \times)^T$$

1.6.14

donde  ${}^t C_e$  es el operador adjunto del  $C_e$ , según la notación de Hörmander, y que evidentemente no es autoadjunto.

La expresión 1.6.13 representa pues la ecuación de Navier para el caso

elástico en términos de distribuciones.

La solución de esta ecuación diferencial en distribuciones es posible plantearla a través de la teoría de convolución. Efectivamente si dotamos al espacio  $D'$  de las distribuciones de la operación "producto de convolución" definido como

$$(f * g, v)_{L^2(\Omega)} = (f(x), (g(y), v(x, y)))_{L^2(\Omega) L^2(\Omega)} \quad 1.6.15$$

adquiere la categoría de un álgebra de convolución  $Q'$ , donde es posible plantear ecuaciones de convolución.

Es bien conocido que en el caso de existir solución fundamental de un operador diferencial,  $E$ , definida esta como

$$A E = \delta \quad 1.6.16$$

con la distribución de Dirac, la ecuación en distribuciones  $Af = g$  tiene solución única, que viene definida por el producto de convolución de la solución fundamental por la ecuación diferencial.

En nuestro caso, si  $E$  es la solución fundamental buscada, la ecuación de convolución quedará definida en la forma

$$\begin{aligned} E * A [H(\Omega) u] &= - E * [H(\Omega) \left\{ X \right\}] - E * {}^t C_e [u \delta(\Omega)] - \\ &- E * [(C_e u) \delta(\Omega)] \end{aligned} \quad 1.6.17$$

que constituye precisamente la ecuación que se iba buscando.

Efectivamente, si  $E$  es la solución fundamental, en un punto  $P$

$$E * A [H(\Omega) u] = H(\Omega) u(P) \quad 1.6.18$$

constituye la solución buscada. Esta solución puede entenderse como la superposición de tres potenciales de convolución, el potencial de fuerzas de volumen - conocido -  $E * [H(\Omega) X]$ , un potencial de simple capa sobre la solución fundamental -  $E * [(C_e u) \delta(\Omega)]$ , y un potencial de doble capa, -  $E * [{}^t C_e [u \delta(\Omega)]]$ .

Recordando la expresión de producto de convolución, cada uno de los potenciales anteriores puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} - E * [H(\Omega) \{X\}] &= - \int_{\Omega} E(x, y) X(y) d\Omega_y \\ - E * [(C_e u) \delta(\Omega)] &= - \int_{\delta\Omega} E(x, y) (C_e u(y)) ds_y \end{aligned} \quad 1.6.19$$

y por último el potencial de doble capa puede realizarse teniendo en cuenta, que - la convolución de una distribución por otra distribución a la que se aplica un operador puede calcularse a través de

$$(u * A v, \phi) = - ({}^t A u * v, \phi) \quad 1.6.20$$

con lo que

$$- E * {}^t C_e [u \delta(\Omega)] = (C_e E) * (u \delta(\Omega)), \quad 1.6.21$$

simplemente recordaremos que  $C_e$  y  ${}^t C_e$  eran adjuntos.

En definitiva podemos expresar el potencial de doble capa como

$$-E \ast {}^t C_e [u(\Omega)] = \int_{\delta \Omega} (C_e E)(x, y) u(y) ds_y \quad 1.6.22$$

Sustituyendo las relaciones 1.6.18, 1.6.19 y 1.6.22 en 1.6.17 se consigue la expresión integral deseada, y que evidentemente vuelve a representar la ecuación de Somigliana.

$$u(x) = - \int_{\Omega} E(x, y) X(y) d\Omega_y + \int_{\delta \Omega} C_e E(x, y) u(y) ds_y - \int_{\delta \Omega} E(x, y) C_e u(y) ds_y \quad 1.6.23$$

La obtención de una solución fundamental es pues un paso previo a resolver, para poder plantear el problema en la forma anterior. Este cálculo es el que se abordará en el epígrafe siguiente, para los distintos casos que puedan plantearse en los problemas elásticos.

### 1.7.- SOLUCION FUNDAMENTAL DE LA ECUACION NAVIER

Se ha indicado en el apartado anterior la necesidad de conseguir la solución fundamental de Navier para los distintos casos que se pueden presentar en la práctica, como son los casos planos, el caso tridimensional y el axisimétrico. Para la consecución de ellas seguiremos para los dos primeros el método de Hörmander, mientras que debido a la dificultad de su manejo para coordenadas cilíndricas utilizaremos el procedimiento de potenciales vectoriales, y particularmente el de Galerkin, y transformaciones integrales para calcular la solución fundamental en el caso axisimétrico.

#### - Caso tridimensional. Método de Hörmander -

Existe una gran cantidad de métodos para el cálculo de la solución fundamental de un operador diferencial, sin embargo, parece que el método de Hörmander, por su simplicidad, es el ideal para el caso que nos ocupa.

Si denominamos  $A$  a un operador diferencial matricial, tal como el que estamos interesados, de coeficientes constantes y de determinante distinto de cero, de acuerdo con el teorema de Hörmander, este operador tiene como solución fundamental.

$$E = A^{co} e \quad 1.7.1$$

donde  $A^{co}$  es la matriz de cofactores de la matriz  $A$  y  $e$  es la solución fundamental del operador  $|A|$ , es decir la solución de la ecuación

$$|A| e = \delta(P) \quad 1.7.2$$

Para el caso tridimensional, según la ecuación 1.6.3 se tenía que el opera

donde de Navier era

$$A = \lambda \nabla \cdot (\nabla \cdot) + G \nabla \cdot (\nabla \times) + G \nabla \cdot (\nabla \times)^T$$

y desarrollando en forma matricial tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} G\Delta + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} & (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} & (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_3} \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} & G\Delta + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} & (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_3} \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{\partial}{\partial y_1} & (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{\partial}{\partial y_2} & G\Delta + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{\partial}{\partial y_3} \end{bmatrix}$$

1.7.3

con lo que

$$|A| = G^2 (\lambda + 2G) \Delta^3$$

1.7.4

La solución fundamental del operador anterior viene dada por ejemplo por Lachat [83] en la forma

$$e = \frac{|\underline{y} - \underline{x}|^3}{3 \times 2^5 \pi G^2 (\lambda + 2G)}$$

1.7.5

Desarrollando pues en forma indicial la ecuación se tiene que

$$E_{ij} = - \frac{1}{8\pi G (\lambda + 2G) r} \left( (\lambda + 3G) \delta_{ij} + (\lambda + G) r_{,i} r_{,j} \right) \quad 1.7.6$$

donde

$$r = |\underline{y} - \underline{x}| = \left[ (y_i - x_i) (y_i - x_i) \right]^{\frac{1}{2}} \quad 1.7.7$$

siendo  $\underline{x}$  el vector de coordenadas del punto P donde localizamos la  $\delta$  de Dirac, e  $\underline{y}$  - el punto de campo donde pretendemos calcular el valor de la solución fundamental. Por último

$$r_{,i} = \frac{y_i - x_i}{r}$$

es la derivada de la distancia  $r$  respecto a la coordenada  $i$  de punto de campo  $\underline{y}$ .

Sustituyendo  $\lambda$  y  $G$  en función de  $E$  y  $\nu$  se llega a la expresión más conocida de Kelvin, correspondiente a los movimientos debidos a una carga puntual en el espacio - infinito y que concuerda evidentemente con la solución fundamental antes calculada.

$$E_{ij} = - U_{ij} = \frac{-(1+\nu)}{8\pi E (1-\nu) r} \left( (3-4\nu) \delta_{ij} + \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{r^2} \right)$$

1.7.8

donde la interpretación física de  $U_{ij}$  vendría dada por el movimiento que aparece en un punto  $\underline{y}$ , en la dirección  $i$  cuando sobre otro punto  $\underline{x}$  se aplica una carga unidad en el=

espacio infinito en la dirección  $j$ , y el signo menos viene como consecuencia de que a la ecuación de Navier se expresa en la forma

$$\underline{A} \underline{u} = -\underline{X}$$

Sustituyendo esta expresión en la 1.6.12 e introduciendo las siguientes notaciones

$$C e E(x, y) = -T_{ij}(x, y)$$

$$C e u(y) = t(y)$$

1.7.9

se tiene

$$\delta_{ij} u_i(x) = \int_{\Omega} U_{ij}(x, y) X_i(y) d\Omega_y - \int_{\delta\Omega} T_{ij}(x, y) u_i(y) ds_y + \int_{\delta\Omega} U_{ij}(x, y) t_i(y) ds_y$$

1.7.10

que es la misma expresión que se obtuvo en 1.5.2.

- Caso bidimensional. Método de Hörmander -

Procediendo de forma análoga al caso anterior, teniendo en cuenta que los casos de tensión plana y deformación plana tienen idéntica expresión de la ecuación de Navier excepto el cambio conocido en el coeficiente de Poisson, se tendría que el operador diferencial en este caso viene dado por la matriz.



$$A = \begin{bmatrix} G \Delta + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} & (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_1} & G \Delta + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

1.7.11

y el determinante

$$|A| = G (\lambda + 2 G) \Delta^2$$

1.7.12

cuya solución fundamental es

$$e = \frac{1}{16 \pi G (\lambda + 2 G)} r^2 \left( 2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right)$$

1.7.13

Sustituyendo de nuevo  $\delta$  y  $G$  por  $E$  y  $\nu$  y desarrollando la expresión 1.7.1 tendremos

$$E_{ij} = -U_{ij} = -\frac{1 + \nu}{4 \pi E (1 - \nu)} \left\{ (3 - 4 \nu) \delta_{ij} \ln 1/r + r_{,i} r_{,j} \right\}$$

1.1.14

donde las variables tienen el mismo significado que anteriormente.

- Caso axisimétrico. Transformaciones integrales -

Para el análisis axisimétrico la carga puntual  $\Delta_k(P)$  se generaliza a cargas anulares como se muestra en la Fig. 1.7.1.

Para el cálculo de la solución fundamental de la ecuación de Navier puede seguirse una técnica muy empleada, consistente en la resolución de la ecuación de Navier expresada en función de los vectores de Galerkin, ecuación A1. (6) para posteriormente calcular los movimientos a partir de la ecuación A1.10

Con este esquema se han desarrollado dos aproximaciones. La primera se reduce a la integración en el anillo de la ecuación de movimientos correspondientes a la carga puntual, y en la segunda calcula el vector de Galerkin haciendolo de una forma directa. Esta última es la que se empleará en este apartado.

Se considera una carga anular radial,  $\underline{F}^r$  y una carga anular en la dirección  $z$ ,  $\underline{F}^z$ , pudiendo expresarse ambas en función de la  $\delta$  de Dirac de la siguiente forma

$$\underline{F}^r = (F_r, 0, 0) = \left( \frac{\delta(R-r, Z-z)}{2\pi r}, 0, 0 \right)$$

1.7.15

$$\underline{F}^z = (0, 0, F_z) = \left( 0, 0, \frac{\delta(R-r, Z-z)}{2\pi r} \right)$$

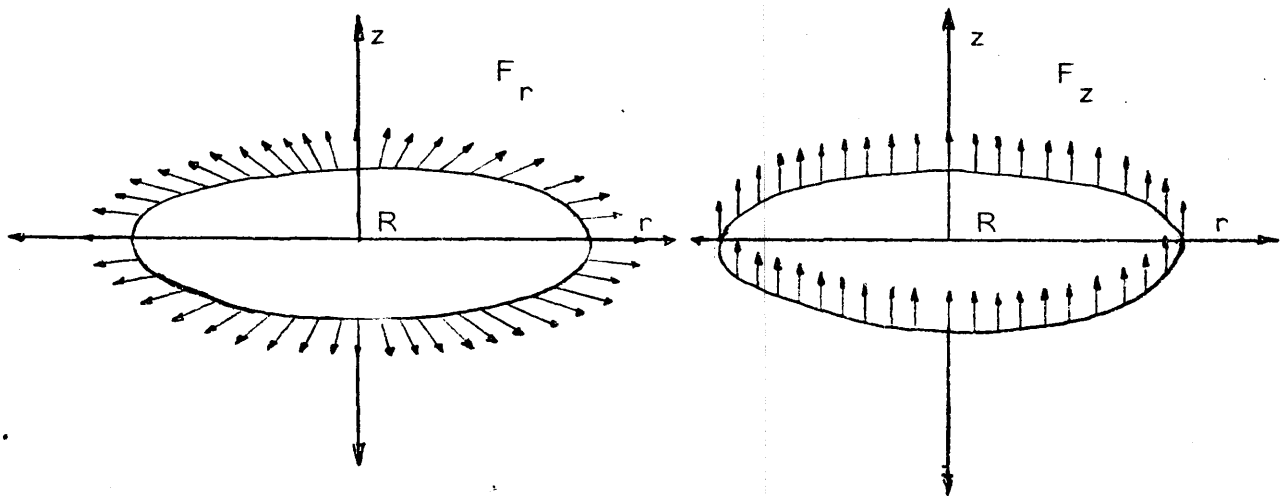


Fig 1.7.1

donde  $R$  y  $Z$  son las coordenadas del punto de aplicación de la carga, independiente de  $\theta$  por ser anular, y  $r$  y  $z$  son las coordenadas del punto de campo.

Naturalmente debido a las propiedades de la función de Dirac las cargas  $\underline{F}^r$  y  $\underline{F}^z$  satisfacen las condiciones.

$$F_r = 0 \quad R, Z \neq r, z$$

$$F_z = 0 \quad R, Z \neq r, z$$

$$\int_V F_r dV = 1$$

$$\int_V F_z dV = 1$$

1.7.16

donde V es cualquier volumen que incluya el anillo de carga, de coordenadas R, Z.

Resolvamos ahora la ecuación de Navier para los dos casos de cargas citados el primero es  $\underline{F}^r = F_r \underline{e}_r$ , y el segundo  $\underline{F}^z = F_z \underline{e}_z$  donde  $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$  son los vectores base en el sistema de coordenadas axisimétrico, de los que hay que hacer notar que su dirección no es constante teniendo derivadas respecto a  $\theta$  en la forma

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\underline{e}_\theta}{r} \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{-\underline{e}_r}{r} \quad \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} = 0 \quad 1.7.17$$

Expresando la ecuación de Navier en función del vector de Galerkin según se indica en el apéndice I, para los dos casos citados tendremos

$$\Delta^4 \underline{G}^r = - \frac{\underline{F}^r}{G} \quad 1.7.18$$

$$\Delta^4 \underline{G}^z = - \frac{\underline{F}^z}{G}$$

Como  $\underline{F}^r$  tiene componente solo en r la solución del vector de Galerkin, debido a las condiciones (1.1.17) se encontrará en el plano (r,  $\theta$ ), y por otro lado debido a la naturaleza axisimétrica del problema la componente en  $\theta$  debe ser nula, por lo tanto  $\underline{G}^r$  es paralelo a  $\underline{F}^r$ .

Por un razonamiento análogo, pero más sencillo pues el eje z permanece inalterado, se deduce que  $\underline{G}^z$  es paralelo a  $\underline{F}^z$  pudiendo escribirse los vectores de

Galerkin como

$$\underline{G}^r = G_r \underline{e}_r$$

1.1.19

$$\underline{G}^z = G_z \underline{e}_z$$

Por lo que la expresión 1.1.18 puede escribirse para el caso axisimétrico

$$(\nabla^2 - 1/r^2) (\nabla^2 - 1/r^2) G_r = - \frac{F_r}{G}$$

1.1.20

$$\nabla^2 \nabla^2 G_z = - \frac{F_z}{G}$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.1.21

La solución de estas dos ecuaciones puede obtenerse a través del uso de transformaciones integrales y puede verse por ejemplo en Massonet quedando en la forma

$$G_r = \frac{Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} Q_{\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma)}{8\pi^2 G}$$

1.1.22

$$G_z = \frac{Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} Q_{-\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma)}{8\pi^2 G}$$

1.1.23

donde

$$\gamma = 1 + \frac{(Z - z)^2 + (R - r)^2}{2Rr} \quad \text{I.1.24}$$

y  $Q_{-\frac{1}{2}}^{-1}$  y  $Q_{\frac{1}{2}}^{-1}$  son funciones de Legendre, de segunda especie. A partir de estos vectores de Galerkin, es posible el cálculo de los movimientos y tensiones en cualquier punto del dominio, debidos a una carga unidad. El desarrollo posteriormente se realiza en el capítulo IV.

## II.- FORMULACION DEL METODO EN ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

### II.1.- INTRODUCCION

Como se ha indicado en el capítulo anterior, la base del método de los elementos de contorno la constituye la ecuación de Somigliana.

$$\delta_{ki} u_i(x) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(x, y) t_i(y) ds_y - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(x, y) u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik}(x, y) X_i(y) ds_y \quad \text{II.1.1}$$

Esta ecuación proporciona el movimiento  $\underline{u}$  en cualquier punto  $x$  del dominio  $\Omega$  en función de tres integrales, que por analogía en su forma, con las que aparecen en la teoría de fuentes puntuales distribuidas en la teoría del Potencial, se las suele denominar como potenciales de simple y doble capa las dos primeras y como un potencial de fuerzas de volumen la última.

Esta ecuación vectorial que realmente constituye un sistema de tres ecuaciones de Fredholm de segunda especie, permite pues calcular el valor del movimiento en un punto del dominio, conociendo los valores de los movimientos  $u_i(y)$  y tensiones  $t_i(y)$  en el contorno.

Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones también es necesario el conocer las tensiones en  $\Omega$ , para lo cual se tendrá que aplicar el operador de Lamé a la ecuación II.1.1. El hecho de que las integrales sean singulares para  $\underline{x} = \underline{y}$  ha-

ce que en este caso aparezcan problemas adicionales.

Por último, y con objeto de aproximar el problema exclusivamente al contorno, se planteará la formulación en él, mediante la aproximación del punto  $\underline{x}$  a  $\delta\Omega$ .

El objetivo de este capítulo, en definitiva, consiste en presentar la formulación completa del método, tanto en lo que se refiere en puntos del interior de  $\Omega$ , como del contorno  $\delta\Omega$ . Asimismo, se planteará una alternativa útil para pasar la integral de fuerzas de volumen al contorno en los casos en que éstas tengan una expresión simple que cumpla una serie de requisitos.



## 11.2.- MOVIMIENTOS EN PUNTOS INTERNOS

La ecuación que proporciona el valor de los movimientos en un punto  $\underline{x}$ , del dominio  $\Omega$  es precisamente la ecuación 11.1.1 ó identidad de Somigliana. Solo falta pues para que ésta quede determinada el expresar los valores de los tensores  $U_{ik}$  y  $T_{ik}$ .

El primero de ellos, y como se vió en 1.7 corresponde , exactamente a la solución fundamental del operador de Navier y para cada uno de los casos que se presentan en elasticidad isótropa (tridimensional, plano y axisimétrico) se calculó en el apartado citado.

Físicamente un elemento  $U_{ik}$  de este tensor representa el movimiento en la dirección  $i$  que aparece en un punto  $\underline{y}$  del espacio infinito, cuando en otro punto  $\underline{x}$  se aplica una carga puntual unidad en la dirección  $k$ .  $U_{ik}$  representa pues el campo de movimientos de la solución de Kelvin, como también se había indicado.

La expresión  $U_{ik}$  para el caso tridimensional, que nos ocupa, se obtuvo en 1.7, en la forma

$$U_{ik} = \frac{1}{16 (1 - \nu) Gr} \left[ (3 - 4\nu) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad 11.2.1$$

donde  $r = \|\underline{y} - \underline{x}\|$ , y  $r_{,i}$   $r_{,k}$  representan las derivadas de la distancia  $\|\underline{y} - \underline{x}\|$ , con respecto a las coordenadas del punto de campo  $\underline{y}$ .

En cuanto al tensor  $T_{ik}$ , había aparecido al aplicar el operador de Lamé,  $C_e$  al tensor anterior (vease 1.6), correspondía pues a la función característica

## FORMULACION

## 11.2

de una integral potencial de doble capa, y físicamente tenía un sentido análogo al de  $U_{ik}$  en lo referente a la solución de Kelvin, pero en este caso referido al campo de vectores tensión en el contorno del dominio.

El cálculo de la expresión de este tensor se reduce pues a calcular la expresión  $C_e U_{ik}$ , ó lo que es igual:

$$T_{ik} = C_e U_{ik} = \lambda \underline{n} \cdot (\underline{\nabla} \cdot \underline{U}) + G \underline{n} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{U}) + G \underline{n} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{U})^T \quad 11.2.2$$

y en notación indicial

$$T_{ik} = \lambda U_{mk,m} n_i + G (U_{ik,j} + U_{jk,i}) n_j \quad 11.2.3$$

donde como siempre se aplica el convenio de índices repetidos y la ",," significa derivada respecto a las coordenadas del punto de campo  $y$ . Sustituyendo en esta expresión el valor de  $U_{ik}$  definido en 11.2.1 y teniendo en cuenta que

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{r} \quad 11.2.4$$

$$(r_{,i}),_j = - \frac{r_{,i} r_{,j}}{r} + \frac{\delta_{ij}}{r}$$

se llega fácilmente a la expresión

$$T_{ik} = - \frac{1}{8(1-\nu)r^2} \left\{ r_{,i} n_{,k} \left[ (1-2\nu) \delta_{ik} + 3 r_{,i} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (r_{,i} n_{,k} - n_{,i} r_{,k}) \right\} \quad 11.2.5$$

Con ello quedaría definido el cálculo de movimientos en puntos internos para el caso tridimensional. Sin embargo, observando las expresiones de los tensores anteriores se aprecia que para  $y \rightarrow x$ , es decir cuando la distancia  $r$  tiende a cero, la expresión de los tensores se hace infinito, o lo que es igual, existe una singularidad intrínseca en los dos tensores, y por tanto en todas las integrales, en el punto  $x$ , donde se centra la carga unidad.

Esta singularidad, aparece realmente solo en la integral de volumen, ya que en las de superficie, nunca se alcanzará la distancia nula, ya que el punto  $x$  se encuentra en el interior del dominio, y el punto de campo en la superficie de éste.

La integral de volumen, sin embargo, sí es singular, con una singularidad del tipo de Cauchy, pero que en este caso no presenta tampoco problema, ya que corresponde a una singularidad débil en la ecuación de Fredholm.

Efectivamente, si la singularidad es del tipo de Cauchy

$$\int \frac{k(x, y)}{r^\alpha} \phi(y) d\Omega_y \quad 11.2.6$$

donde  $k(x, y)$  es una función acotada de dos variables en el dominio  $\Omega$ , y  $r$  es la distancia entre los puntos  $x, y$ .

En el caso en que

$$\alpha < n$$

11.2.7

con  $n$  el número de dimensiones del espacio  $\Omega$  (en nuestro caso  $\alpha = 1$ ,  $n = 3$ ), la integral 11.2.6, es una integral impropia que converge absolutamente en el límite siguiente:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - B_{\epsilon}(x)} \frac{k(x, y)}{r} \phi(y) d\Omega_y \quad 11.2.8$$

donde  $B_{\epsilon}(x)$  es la bola de radio  $\epsilon$  y centrada en el punto singular. Es decir la integral anterior esta definida en el sentido del valor principal de Cauchy.

En el caso que nos ocupa, por tanto, si entendemos la integral de volumen, en el sentido del valor principal de Cauchy, esta integral existe ya que la singularidad que presenta es débil.

Naturalmente, si el dominio ahora se considera  $\Omega - B_{\epsilon}(x)$  en el límite correspondiente, el contorno ha variado, siendo ahora  $\delta\Omega \cup \delta B_{\epsilon}(x)$ , siendo  $\delta B_{\epsilon}(x)$  el contorno de la bola  $B_{\epsilon}(x)$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Las integrales de contorno serían pues suma de dos. La primera de ellas está extendida a  $\delta\Omega$  y la segunda a  $\delta B_{\epsilon}(x)$ , pero esta integral es claramente nula, tanto para el potencial de simple como de doble capa. Efectivamente en lo referente al primero, por ser de nuevo una integral débilmente singular ( $\alpha = 1$ ,  $n = 2$ ), la integral sobre la superficie de esta bola es cero. En cuanto al potencial de doble capa, no ocurre igual sino que  $\alpha = n = 2$ , apareciendo una singularidad fuerte, que es necesario calcular. La integral queda-

rá pues como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_{\epsilon}(x)} T_{ik} u_i ds_y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_{\epsilon}(x)} -\frac{1}{2} \bar{T}_{ik}(\theta, \phi) u_i \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi =$$

$$= u_i(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \bar{T}_{ik}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta \quad 11.2.9$$

donde  $\bar{T}_{ik}$  es la parte del nucleo  $T_{ik}$  en la que se ha eliminado la singularidad, también denominada función característica de la integral singular.

El valor de esta integral es fácilmente calculable teniendo en cuenta la expresión 11.2.5 para  $T_{ik}$ , y el resultado es cero como era de esperar.

En definitiva, es posible plantear la ecuación de Somigliana en un dominio  $\Omega_{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Omega - B_{\epsilon}(x)]$ , siendo  $x$  el punto donde se centra la singularidad, simplemente teniendo en cuenta que la integral de volumen habrá que entenderla en el sentido del valor principal de Cauchy, que en este caso existe, ya que la singularidad de esta integral es del tipo débil.

Si para simplificar realizamos el cambio de notación

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - B_{\epsilon}(x)} = \int_{\Omega} \quad 11.2.10$$

La ecuacion de Somigliana extendida al dominio  $\Omega_\epsilon$ , que como se ha visto corresponde exactamente a la ecuación de partida del método para el caso de puntos internos, tendrá una expresión idéntica a la II.1.1 ya comentada, siempre teniendo en cuenta que la integral de volumen es necesario entenderla según el sentido de Cauchy y donde las expresiones de los distintos tensores  $U_{ik}$  y  $T_{ik}$  vienen definidas por II.2.1 y II.2.5 respectivamente.

### 11.3.- TENSIONES EN PUNTOS INTERNOS

El siguiente punto fundamental del método en elasticidad, corresponde a -  
cálculo del tensor de tensiones en los distintos puntos del dominio.

Si bien algunos autores calculan estas tensiones, a través de un -  
proceso de interpolación en diferencias una vez conocidos los movimientos en los -  
puntos internos en la forma indicada anteriormente (Cathie y Banerjee), el procedi-  
miento, evidentemente más consistente con la formulación general consistirá en apli-  
car el operador elástico directamente a la ecuación 11.1.1. Es decir, una vez cono-  
cido el vector  $\underline{u}(x)$  de movimientos en un punto  $\underline{x}$  del dominio donde se centra la sin-  
gularidad, se puede calcular el tensor de tensiones mediante la ecuación de Lamé.

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda u_{l;l} \delta_{ij} + G (u_{i;j} + u_{j;i}) \quad 11.3.1$$

donde ahora el ";" representa la derivada respecto a las coordenadas del punto  $x$ , -  
al contrario que la "," que como se indicó significa derivada respecto a las coorde-  
nadas del punto de campo  $y$ .

Es necesario pues el calcular las derivadas de los movimientos respecto a  
las coordenadas del punto  $x$ . Aplicando el operador derivada a la ecuación ante-  
rior se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{ki} u_{i;m} = & \int_{\delta \Omega} U_{in;m} t_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik;m} u_i ds_y + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega} U_{ik} X_i ds_y \end{aligned} \quad 11.3.2$$

El hecho de poder derivar dentro de las integrales de superficie, es evidente, ya que no son integrales singulares, sin embargo la derivada de la integral de volumen ha de entenderse como la derivada de una integral singular del tipo de Cauchy.

Este concepto de derivada de integrales fue desarrollado por Mikhlin y aplicado por primera vez por Bui al método de los elementos de contorno, en plasticidad. En definitiva es necesario, calcular la derivada de la integral de volumen anterior.

Según Mikhlin, la derivada de una integral singular entendida en el sentido de Cauchy, que sea continua evidentemente, como lo es ésta al tratarse de una singularidad del tipo débil se define como

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega} \zeta(x, y) \xi(y) d\Omega_y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_{\epsilon}(x)} \frac{\partial \zeta}{\partial x_m} \xi d\Omega_y - \xi(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_{\epsilon}(x)} \zeta(x, y) r_{,m} ds_y \quad 11.3.3$$

es decir la integral de la derivada también entendida en el sentido de Cauchy, menos un cierto término correspondiente a la singularidad, en el que  $r_{,m}$  representa la derivada de la distancia  $\|y - x\|$  respecto a la coordenada  $y_m$  del punto de campo.

Aplicando este concepto a la ecuación 11.3.2, ésta se convertirá en



$$\delta_{ki} u_{i;m} = \int_{\delta \Omega} U_{ik;m} t_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik;m} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik;m} X_i d\Omega_y -$$

$$- X_i(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_{\epsilon}(x)} U_{ik} r_{,m} ds_y \quad 11.3.4$$

donde de nuevo se ha hecho uso del cambio de notación definido en 11.2.10.

Es necesario pues, el calcular el valor de esta última, para a continuación aplicar el operador de Lamé 11.3.1 a la ecuación 11.1.1 y calcular el tensor de tensión en un punto del interior.

El valor de esa integral, es claramente cero, ya que como se desprende de 11.2.1  $U_{ik}$  es de orden 0 ( $\frac{1}{r}$ ) y  $ds_y$  del orden 0 ( $r^2$ ), mientras que si recordamos el valor de  $r_{,i}$  en una superficie esférica.

$$r_{,i} = \delta_{i1} \cos \theta \cos \phi + \delta_{i2} \cos \theta \sin \phi + \delta_{i3} \sin \theta \quad 11.3.5$$

se observa que es de orden 0 (1). En definitiva si  $U_{ik}$  es continua y acotada respecto al ángulo  $\theta$  y el ángulo  $\phi$ , como de hecho lo es, ya que sólo depende de las derivadas de la distancia, la integral buscada toma el valor cero.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_{\epsilon}(x)} U_{ik} r_{,m} ds_y = 0 \quad 11.3.6$$

Introduciendo este resultado en la ecuación 11.3.4 se tiene en definitiva la derivada de la expresión respecto a la coordenada  $m$  del punto singular en la forma

$$\delta_{ki} u_{i;m} = \int_{\delta \Omega} U_{ik;m} t_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik;m} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik;m} X_i d\Omega_y$$

11.3.7

donde la integral de volumen se entiende en el sentido de Cauchy.

Aplicando ahora el operador completo 11.3.1 a la ecuación 11.1.1, y teniendo en cuenta el resultado 11.3.7 se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) = & \int_{\delta \Omega} D_{ijk}(x, y) t_k(y) ds_y - \int_{\delta \Omega} S_{ijk}(x, y) u_k(y) ds_y - \\ & + \int_{\Omega} D_{ijk}(x, y) X_k(y) d\Omega_y \end{aligned}$$

11.3.8

donde los tensores que aparecen se deducen inmediatamente como

$$D_{ijk} = \lambda U_{ik;l} \delta_{ij} + G (U_{ik;j} + U_{jk;i})$$

11.3.9

$$S_{ijk} = \lambda T_{ik;l} \delta_{ij} + G (T_{ik;j} + T_{jk;l})$$

Si desarrollamos las expresiones anteriores, simplemente dandonos cuenta que  $r_{,i} = -r_{,i}$ , se puede llegar a la formulación completa de los valores de las tensiones en el dominio. Este desarrollo está realizado por ejemplo en París [1.00], por lo que no nos detendremos en él, limitandonos a presentar el resultado

$$D_{ijk} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + \right.$$

$$+ 3 r_i r_j r_k \Big]$$

$$S_{ijk} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3 \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_k + \nu (\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) - \right. \right. \\ \left. \left. - 5 r_i r_j r_k \right] n_l + 3 \nu (n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) (3 n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\}$$

11.3.10

La expresión 11.3.8 junto a las anteriores permite pues el cálculo de las tensiones en un punto del interior del dominio, una vez conocidos los valores de las tensiones y movimientos en el contorno, así como, evidentemente, las fuerzas por unidad de volumen.

#### 11.4.- ECUACION DE SOMIGLIANA PARA PUNTOS DEL CONTORNO

Como se ha ido explicando a lo largo del capítulo I, el objetivo final del método consiste en resolver el problema planteandolo exclusivamente en el contorno. Será por tanto necesario el hacer tender el punto donde se centra la singularidad, (punto  $x$ ) en la identidad de Somigliana al contorno.

Sin embargo, este proceso lleva consigo el hecho de que las integrales de superficie que no eran singulares cuando el polo se encontraba en el interior del dominio, lo sean ahora, al igual que ocurría anteriormente con las integrales de volumen.

Recordando que la identidad de Somigliana se extendia a un dominio  $\Omega_\epsilon = [\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Omega - B_\epsilon(x))]$ , podremos expresar aquella, como

$$\delta_{ki} u_i = \int_{\delta\Omega_\epsilon} U_{ik} t_i ds_y - \int_{\delta\Omega_\epsilon} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\Omega_\epsilon} U_{ik} X_i \quad 11.4.1$$

En el caso de que el punto singular fuera un punto interior las integrales de superficie quedaban reducidas a integrales sobre  $\delta\Omega$ . En el caso de que la singularidad se encuentre en el contorno no es posible realizar esta simplificación.

Efectivamente, en este caso  $\delta\Omega_\epsilon \neq \delta\Omega \cup \delta B_\epsilon(x)$  sino que  $\delta\Omega_\epsilon = S_1 \cup S_\epsilon$  (Fig. 11.4.1)

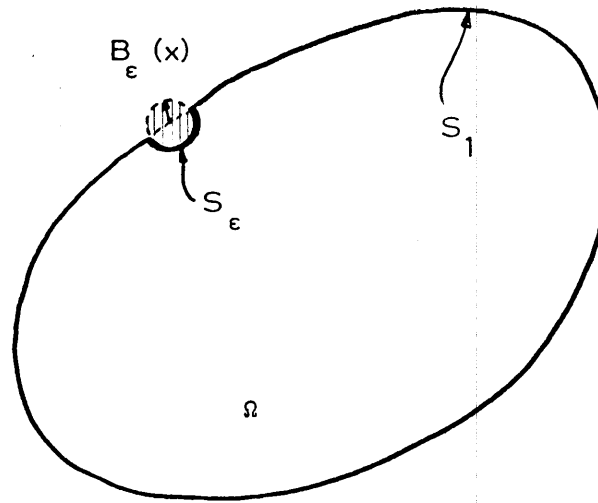


Fig. II.4.1

A continuación vamos a definir exactamente cada una de las superficies anteriores. En el caso de que  $\underline{x}$  sea un punto correspondiente a un contorno suave de Liapunov, existirá un sólo plano tangente y una sola normal, aunque no necesariamente con una sola curvatura. Sea  $T(\underline{x})$  dicho plano tangente. En cambio, si  $\underline{x}$  es un punto correspondiente a una esquina, existirán varios planos tangentes, que puedan llegar a ser infinitos (caso del vértice de un cono). Sean  $T_i(\underline{x})$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) dichos planos tangentes. Tanto en un caso como en otro, el conjunto de todas las semitangentes, que parten de  $\underline{x}$  y penetran en el semiespacio limitado por  $T_i(\underline{x})$ , en el que se encuentra  $\Omega$  forma la superficie de una pirámide a la que denominaremos "superficie característica"  $P(\underline{x})$ , término de Hartmann, que puede observarse en la Fig II.4.2.

Con estos conceptos podemos ya definir las superficies  $S_1$  y  $S_\epsilon$ , anteriormente indicadas.

$$S_{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta [ B_{\epsilon}(x) \cap P(x) ] - \delta P(x)$$

11.4.2

$$S_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [ \delta [ \Omega - B_{\epsilon}(x) ] - S_{\epsilon} ]$$

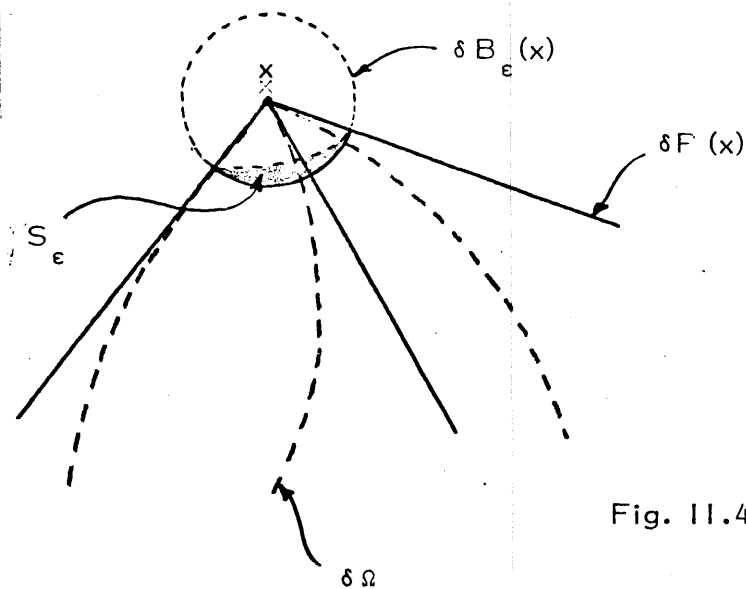


Fig. 11.4.2

Asimismo, en este caso

$$\Omega_{\epsilon} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta [ \Omega - B_{\epsilon}(x) ] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta [ \Omega \cap (B_{\epsilon}(x) \cap P(x)) ] \quad 11.4.3$$

ya que  $B_{\epsilon}(x) \cap P$  es la única zona de  $B_{\epsilon}(x)$  que está incluida en  $\Omega$ .

Si dividimos ahora las integrales de superficie en 11.3.1 en dos integrales, la primera extendida a la superficie  $S_1$  y la segunda a la superficie  $S_{\epsilon}$  tendremos

$$\delta_{ki} u_i = \int_{S_1} U_{ik} t_i ds_y + \int_{S_\epsilon} U_{ik} t_i ds_y - \int_{S_1} T_{ik} u_i ds_y - \int_{S_\epsilon} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\Omega_\epsilon} U_{ik} X_i d\Omega_y \quad \text{II.4.4}$$

Las integrales primera y tercera, son precisamente las integrales de II.1.1 pero entendidas en el sentido de Cauchy, ya que ahora son singulares, y del mismo modo la integral de volumen.

Será pues necesario en principio demostrar que esas integrales existen y están definidas en el sentido de Cauchy.

La primera de ellas, no presenta problema, ya que de nuevo nos encontramos ante un tipo de singularidad débil. El orden de la singularidad es inferior al de dimensiones del espacio sobre el que se integra.

En cambio la segunda corresponde a una integral con fuerte singularidad, que ha de cumplir una serie de requisitos, para poderse definir. Estos requisitos, para integrales multidimensionales han sido propuestos por Mikhlin en la forma siguiente, para el caso de 2 dimensiones que nos ocupa.

(1).- La integral de la función característica (nucleo de la integral multiplicado por  $r$  elevado al orden de la singularidad) extendida a  $\delta B_\epsilon(x)$  es cero.

(2).- En cualquier subespacio de  $\mathbb{R}^2$  la función densidad de la integral (el=

vector que no depende de la situación del polo ó punto singular) es Hölder-continua, es decir cumple

$$\left| u(y_1) - u(y_2) \right| < C r^\alpha \quad C = \text{Cte} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{II.4.5}$$

(3).- En el infinito la función densidad  $u(y)$  es de orden  $O(\|y\|^{-k})$  con  $k > 0$ .

(4).- La función característica es acotada y continua respecto a  $(y - x)$  para un  $x$  fijo.

Si estas condiciones son satisfechas, entonces podemos afirmar que la integral singular existe en el sentido de Cauchy, y es continua respecto a  $x$ .

Todas estas condiciones se cumplen en el caso que nos ocupa (Kupradze - 1965), y particularmente ya hicimos uso de la primera de ellas en el epígrafe anterior.

Sólo falta pues el cálculo de las integrales extendidas a  $S_\epsilon$ . La primera de ellas de nuevo es nula, ya que el tensor  $U_{ik}$  según II.2.1 es de orden  $O(-\frac{1}{r})$  y como  $ds_y = \epsilon^2 \sin \theta d\phi d\theta$ , y  $t_i$  está acotado en  $S_\epsilon$ , se puede en definitiva escribir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} U_{ik} t_i ds_y = 0 \quad \text{II.4.6}$$

El tensor  $T_{ik}$ , en cambio es de orden  $O(-\frac{1}{r^2})$  siendo necesario calcular la integral correspondiente.



# FORMULACION

## 11.5

Para la esfera  $B_\epsilon(x)$  la normal coincide con la dirección del radio, en  $S_\epsilon$ , por lo que  $r, |n| = \frac{\partial r}{\partial n} = 1$ , con lo que en esta superficie

$$T_{ik} = -\frac{1}{r^2} \bar{T}_{ik}(\theta, \phi) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \begin{bmatrix} (1-2\nu)+3r_{,1}^2 & 3r_{,1}r_{,2} & 3r_{,1}r_{,3} \\ & (1-2\nu)+3r_{,2}^2 & 3r_{,2}r_{,3} \\ \text{sim} & & (1-2\nu)+3r_{,3}^2 \end{bmatrix}$$

11.4.7

sin más que tener en cuenta la expresión 11.2.5

Haciendo uso de las expresiones del diferencial de superficie en coordenadas polares  $ds_y = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  se tendrá

$$\int_{S_\epsilon} T_{ik} u_i ds_y = u_i(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{ik} ds_y = u_i(x) \int_{S_\epsilon} \bar{T}_{ik} \sin \theta d\theta d\phi$$

11.4.8

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de  $ds_y$ , y de  $r, i$  definido en 11.3.5, e integrando tenemos

$$\int_S T_{ik} u_i ds_y = C_{ik} u_i(x)$$

11.4.9

FORMULACION

11.4

con

$$C_{ik} = \int_S \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} (1-2\nu)+3\cos^2\phi\sin^2\theta & 3\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta & 3\cos\phi\sin\phi\cos\theta \\ (1-2\nu)+3\sin^2\phi\sin^2\theta & 3\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta & 3\sin\phi\cos\phi\cos\theta \\ (1-2\nu)+3\cos^2\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin\theta d\phi d\theta$$

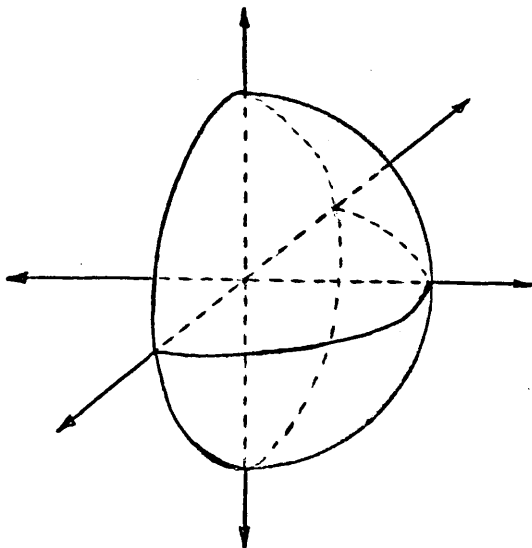
$\cdot \sin\theta d\phi d\theta$

11.4.10

que resuelta permitiría escribir el valor de  $C_{ik}$  para cualquier forma de  $S_\epsilon$ .

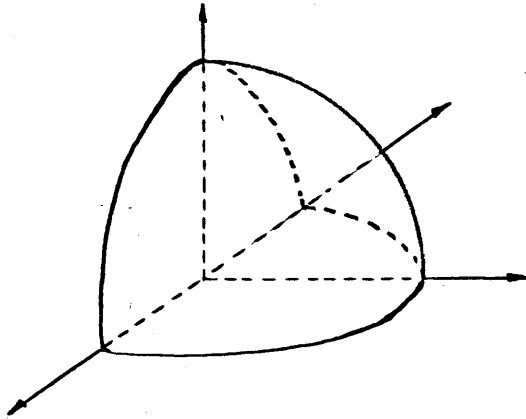
Algunos casos particulares y muy comunes son los siguientes.

(1).- Superficie suave. La superficie  $S_\epsilon$  es una emiesfera.



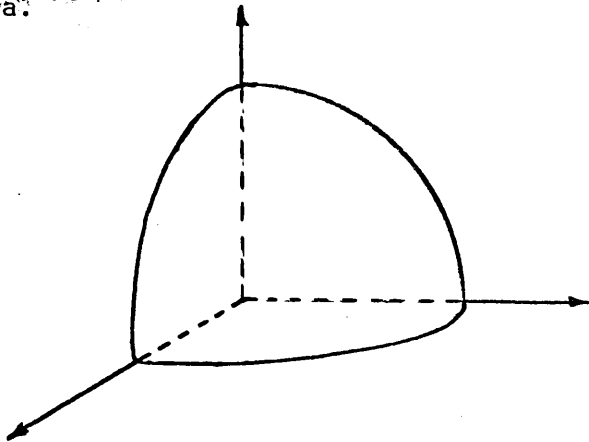
$$C_{ik} = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 4\pi & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi \end{bmatrix}$$

(2).- Caso de un nodo en una arista. La superficie  $S_e$  es un cuarto de esfera.



$$C_{ik} = \frac{1}{8\pi} \begin{bmatrix} 6\pi & 0 & 0 \\ 0 & 6\pi & -\frac{2}{1-\nu} \\ 0 & -\frac{2}{1-\nu} & 6\pi \end{bmatrix}$$

(3).- Nodo en una esquina recta. La superficie  $S_e$  es un octavo de esfera.



$$C_{ik} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 7\pi & \frac{-1}{1-\nu} & \frac{-1}{1-\nu} \\ \frac{-1}{1-\nu} & 2\pi & \frac{-1}{1-\nu} \\ \frac{-1}{1-\nu} & \frac{-1}{1-\nu} & 7\pi \end{bmatrix}$$

Naturalmente los valores de  $C_{ik}$  como muestra 11.4.10 no solo dependen de la medida de  $S_\epsilon$  sino también de la orientación de ésta por lo que los valores son - válidos únicamente para los casos particulares que presentan las figuras.

Sustituyendo los resultados de 11.4.6 y 11.4.9 en 11.4.1 se obtiene la ecuación de Somigliana cuando la singularidad se encuentra en el contorno, quedando

$$(\delta_{ik} - C_{ik}) u_i = \int_{\delta\Omega} U_{ik} t_i ds_y - \int_{\delta\Omega} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y \quad 11.4.11$$

donde de nuevo las integrales hay que entenderlas en el sentido de Cauchy, y  $C_{ik}$  - está definido en 11.4.10.

### 11.5.- TENSOR DE TENSIONES EN PUNTOS DE CONTORNO

La ecuación 11.3.8 proporcionaba el resultado necesario para el cálculo de las tensiones en puntos internos, sin embargo no es posible aplicar esta ecuación para el cálculo del tensor de tensiones en puntos del contorno, ya que en la derivación de las integrales de superficie no se ha considerado que eran singulares.

Tampoco es posible calcular el tensor de tensiones mediante aplicación del operador de Lamé a la ecuación 11.4.11 porque aparecerían integrales infinito, y = por tanto sin sentido. Para obtener la expresión del tensor de tensiones en puntos del contorno será necesario el utilizar una interpolación de movimientos, obteniéndose aquel en función de la variación de estos en el contorno.

Para ello, se va a utilizar un sistema local situado en el punto del contorno donde pretendemos calcular el tensor de tensiones, de forma que la coordenada  $z$  local coincida con la normal al contorno en el punto en cuestión (en el caso de que en este punto exista más de una normal al contorno, escogeremos la normal a una cualquiera de las caras), y por tanto, el plano  $x$  y (plano  $\pi$ ) sea tangente al contorno (cara anterior) en dicho punto (Fig. 11.5.1).

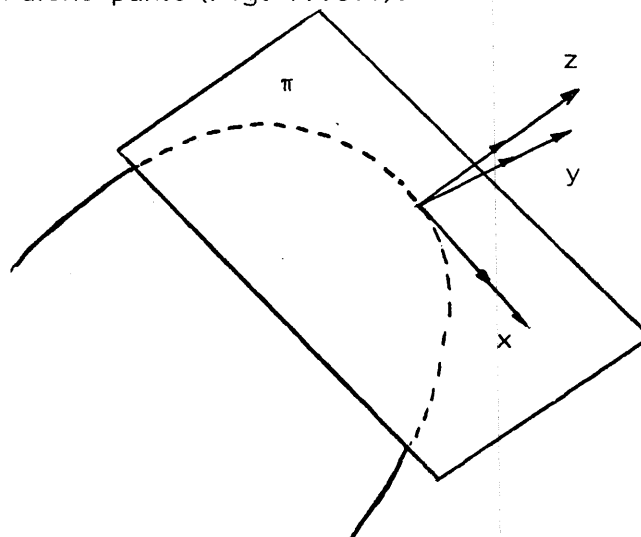


Fig. 11.5.1

## FORMULACION

## 11.5

En esas coordenadas y para la cara tratada, el vector tensión será conocido, ó será una incógnita del problema, con lo que una vez resuelto éste siempre será conocido. Con ello, y en las coordenadas locales antedichas tendremos

$$\begin{aligned}\sigma_z(P) &= t_z \\ \tau_{xz}(P) &= t_x \\ \tau_{yz}(P) &= t_y\end{aligned}\tag{11.5.1}$$

El resto de las componentes del tensor tensión pueden calcularse realizando la interpolación de movimientos indicada.

Si suponemos conocidas las variaciones de los movimientos  $u$  y  $v$  en las direcciones  $x$  e  $y$ , será posible calcular las deformaciones

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{11.5.2}$$

Conocidas estas deformaciones podemos calcular inmediatamente la tensión tangencial que faltaba.

$$\tau_{xy} = G \epsilon_{xy}\tag{11.5.3}$$

Las tensiones normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  pueden también calcularse como sigue, haciendo uso de las relaciones de Lamé

$$\epsilon_z = \frac{1}{1-\nu} \left[ (1-2\nu) \frac{\sigma_z}{2G} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \right]$$

y sustituyendo en las expresiones de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  tendremos en definitiva.

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu} (2G \epsilon_x + 2G \nu \epsilon_y + \nu \sigma_z)$$

11.5.4

$$\sigma_y = \frac{1}{1-\nu} (2G \epsilon_y + 2G \nu \epsilon_x + \nu \sigma_z)$$

donde ya todos los valores son conocidos.

### 11.6.- TRANSFORMACION DE LA INTEGRAL DE FUERZAS DE VOLUMEN EN UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Es evidente que la gran ventaja del método de los elementos de contorno, en cuanto que reduce las integrales al contorno, siendo necesaria tan sólo la discretización de éste, queda anulada por el hecho de la aparición de integrales de volumen.

El mayor inconveniente surge pues en el caso de que existan fuerzas de volumen por lo que distintos autores han seguido varias aproximaciones para tratar de reducir, o eliminar las dificultades que estas integrales introducen.

La primera simplificación que se ocurre, surge observando la ecuación de Navier para el caso elástico.

$$A u = - X$$

11.6.1

donde A es el operador de Navier, lineal.

A partir de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales lineales, se puede intentar conseguir la solución de esta ecuación, como suma de la solución de la ecuación homogénea, correspondiente a fuerzas de volumen nulas, y que por tanto no encierra ningún problema en cuanto al método propuesto, y una solución particular de la ecuación 11.6.1 para el caso de que existan fuerzas de volumen.

En la mayoría de los casos prácticos de fuerzas por unidad de volumen, esta solución particular es fácilmente obtenible en forma polinómica, por lo que en estos casos el problema desaparecería.



Sin embargo, existen otros casos de fuerzas de volumen en los que no es posible conseguir fácilmente esta solución particular. Asimismo en los problemas no lineales (plasticidad por ejemplo) la superposición de soluciones deja de ser válida. Para salvar este problema se ha seguido una aproximación distinta, propuesta por Cruse, y que es muy útil para fuerzas de volumen, que derivan de una función potencial. Esta formulación es la que se presenta a continuación.

Se había visto que la integral de fuerzas de volumen tenía la expresión

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y \quad 11.6.2$$

Si el vector de fuerzas de volumen  $X_i$  puede disponerse como el gradiente de una función potencial,

$$\underline{X} = \underline{\nabla} \phi \quad 11.6.3$$

$$X_i = \phi_{,i}$$

tendremos

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \int_{\Omega} U_{ik} \phi_{,i} d\Omega_y \quad 11.6.4$$

Teniendo en cuenta ahora la expresión del gradiente de un producto de funciones

$$(U_{ik} \phi)_{,i} = U_{ik,i} \phi + U_{ik} \phi_{,i} \quad 11.6.5$$

$$U_{ik} \phi_{,i} = (U_{ik} \phi)_{,i} - U_{ik,i} \phi$$

que sustituida en 11.6.4 permite escribir

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \int_{\Omega} (U_{ik} \varnothing)_{,i} d\Omega_y - \int_{\Omega} U_{ik,i} \varnothing d\Omega_y \quad 11.6.6$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la primera de las integrales del segundo miembro se puede pasar a integral de superficie quedando.

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} U_{ik} \varnothing n_i d\Omega_y - \int_{\Omega} U_{ik,i} \varnothing d\Omega_y \quad 11.6.7$$

donde  $n_i$  es la normal al contorno en el punto de campo  $y$ .

En este momento es preciso hacer la salvedad de que la integral de superficie anterior existe en el sentido de Cauchy ya que presenta una singularidad débil - cuando se integra desde un punto del contorno.

La segunda integral se puede también pasar al contorno expresando el tensor de movimientos  $U_{ik}$  en función del vector de Galerkin, según la expresión A1.10

$$U_{ik} = x_{ik',ll} - \frac{1}{2(1-\nu)} x_{lk',li} \quad 11.6.7$$

y teniendo en cuenta la expresión del laplaciano de un vector en función del gradiente de la divergencia y del rotacional del rotacional

$$\nabla^2 \underline{v} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{v})$$

y en forma indicial

$$v_{i,ll} = v_{l,li} - \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} v_{o,pm} \quad 11.6.8$$

FORMULACION

11.6

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el índice de permutación definido como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i \neq j \neq k \text{ permutación par} \\ -1 & i \neq j \neq k \text{ permutación impar} \\ 0 & i = j, j = k, k = i \end{cases} \quad 11.6.9$$

Aplicando la expresión 11.6.8 al primer término del segundo miembro de la expresión 11.6.7 se puede escribir

$$U_{ik} = x_{lk',li} - \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pn} - \frac{1}{2(1-\nu)} x_{lk',li}$$

y operando

$$U_{ik} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{lk',li} - \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \quad 11.6.10$$

Por tanto la divergencia de  $U_{ik}$  que aparece en la integral de volumen que quedaba será

$$U_{ik,i} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{lk',lii} - \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pmi}$$

$$U_{ik,i} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{lk',lii} \quad 11.6.11$$

ya que la divergencia del rotacional de un vector es cero.

Sustituyendo en 11.6.7 tendremos

$$\int_{\Omega} U_{ik} x_i d\Omega_y = \int_{\partial\Omega} U_{ik} \phi n_i d\Omega_y - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\Omega} x_{lk',lii} \phi d\Omega_y \quad 11.6.12$$

FORMULACION

11.6

Observando esta última integral vemos que para  $k$  fijo, es decir para una ecuación integral concreta, la función subintegrando corresponde al producto del laplaciano de una función  $x_{lk}$  por otra función  $\phi$ . Es posible pues aplicar el teorema de Green, en la forma

$$\int_{\Omega} [x_{lk,i} \phi_{,ii} - x_{lk,iii} \phi] d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} x_{lk,i} \phi_{,i} n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} \phi x_{lk,li} n_i ds_y \quad 11.6.13$$

En el caso de que la divergencia del vector de fuerzas de volumen sea constante

$$x_{i,i} = K_o \quad ; \quad \phi_{,ii} = K_o \quad 11.6.14$$

podremos escribir

$$-\int_{\Omega} x_{lk,iii} \phi d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} x_{lk,i} \phi_{,i} n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} \phi x_{lk,li} n_i ds_y - K_o \int_{\Omega} x_{lk,i} d\Omega_y \quad 11.6.15$$

y aplicando el teorema de la divergencia a esta última integral, tendremos definitivamente todas las integrales pasadas al contorno del dominio.

$$-\int_{\Omega} x_{lk,iii} \phi d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} x_{lk,i} \phi_{,i} n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} \phi x_{lk,li} n_i ds_y - K_o \int_{\delta\Omega} x_{lk,i} n_i ds_y \quad 11.6.16$$

Sustituyendo esta expresión en 11.6.12. Sustituyendo el valor de  $U_{ik}$  en función de  $x_{lk}$  en la primera integral, tendremos en definitiva

FORMULACION

11.6

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk',li} \varnothing n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \varnothing n_i ds_y + \\ &+ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk',li} \varnothing_{,i} n_i ds_y - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} \varnothing_{lk',li} n_i ds_y - \\ &- K_o \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk} n_l ds_y \end{aligned}$$

y agrupando términos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y &= + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk',li} \varnothing_{,i} n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \varnothing n_i ds_y - \\ &- K_o \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk} n_l ds_y \end{aligned} \quad 11.6.17$$

Esta expresión se puede modificar algo más de forma que sólo aparezcan las fuerzas de volumen en la ecuación y no la función potencial. Efectivamente si volvemos por un momento esta integral a una de volumen, tendremos

$$\begin{aligned} \int_{\delta\Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \varnothing] n_i ds_y &= \int_{\Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \varnothing]_{,i} d\Omega_i = \\ &= \int_{\Omega} \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pmi} d\Omega_y + \int_{\Omega} \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',pm} \varnothing_{,i} d\Omega_y \end{aligned} \quad 11.6.18$$



La primera de estas ecuaciones de nuevo es cero pues representa la divergencia de un rotacional. Centrandonos en la segunda y recordando la conocida expresión

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \times \underline{\nabla} \times \underline{w}) = \underline{v} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{w}) - (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{w}) \quad 11.6.19$$

En nuestro caso se puede expresar en forma indicial como

$$(\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} \chi_{ok,p} \phi_{,m})_{,i} = \phi_{,i} \epsilon_{imn} \epsilon_{npo} \chi_{ok,pm} - (\epsilon_{imn} \phi_{,im})_{,i} \cdot (\epsilon_{npo} \chi_{ok,p}) \quad 11.6.20$$

El último de estos sumandos es nulo, ya que  $(\epsilon_{imn} \phi_{,im})$  representa el rotacional del gradiente de la función  $\phi$  que como sabemos es siempre cero. En definitiva, sustituyendo la expresión 11.6.20 en 11.6.18 teniendo en cuenta el resultado anterior.

$$\begin{aligned} \int_{\delta \Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} \chi_{ok,pm} \phi] n_i ds_y &= \int_{\Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} \chi_{ok,p} \phi_{,m}]_{,i} d\Omega_y = \\ &= \int_{\delta \Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} \chi_{ok,p} \phi_{,m}] n_i ds_y \end{aligned} \quad 11.6.21$$

donde de nuevo hemos aplicado el teorema de la divergencia.

Introduciendo esta expresión en la ecuación 11.6.17 y teniendo en cuenta que  $\phi_{,m} = X_m$  se tiene en definitiva

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk',l} X_i n_i ds_y - \int_{\delta\Omega} [\epsilon_{imn} \epsilon_{npo} x_{ok',p} X_m] n_i ds_y -$$

$$- K_o \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} x_{lk} n_l ds_y \quad 11.6.22$$

que es la ecuación buscada.

Resumiendo podemos decir que para fuerzas de volumen que derivan de un potencial, es posible el pasar la integral de volumen correspondiente a integrales de superficie, según indica la expresión 11.6.22, que podemos agrupar en la forma siguiente

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta\Omega} F_k ds_y \quad 11.6.23$$

donde, si tenemos en cuenta que

$$\epsilon_{jmn} \epsilon_{npo} = \delta_{jp} \delta_{mo} - \delta_{jo} \delta_{mp}$$

Se tiene

$$E_{ik} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{lk',l} n_i - x_{ik',p} n_p + x_{jk',i} n_j$$

11.6.24

$$F_k = - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} K_o x_{lk} n_l$$

Las expresiones de los tensores anteriores pueden obtenerse para el caso tridimensional, teniendo en cuenta que

$$x_{ik} = \frac{1}{8\pi G} r \delta_{ik} \quad 11.6.25$$

siendo  $r$  la distancia  $\|y - x\|$  desde el punto donde se aplica la carga  $x$  al punto de campo  $y$ .

Con ello se tiene

$$E_{ik} = \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} r_{,k} n_i - r_{,p} n_p \delta_{ik} + r_{,i} n_k \right] \quad 11.6.26$$

$$F_k = - \frac{(1-2\nu)}{16\pi G(1-\nu)} K_o r n_k$$

Todavía es necesario el tratamiento de la integral de volumen que aparece en el cálculo de las tensiones en puntos internos, es decir de la integral.

$$\int_{\Omega} D_{ijk} X_i d\Omega_y \quad 11.6.27$$

Recordando que esta integral aparecía como consecuencia de la aplicación del operador de Lamé a la integral anteriormente tratada, podremos escribir en definitiva.

$$\int_{\Omega} D_{ijk} X_k d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} G_{ijk} X_k ds_y + \int_{\delta\Omega} H_{ij} ds_y \quad 11.6.28$$

donde



$$G_{ijk} = \lambda E_{ik;j} \delta_{ij} + G (E_{ik;j} + E_{jk;i})$$

11.6.29

$$H_{ij} = \lambda F_{;i} \delta_{ij} + G (F_{;i;j} + F_{;j;i})$$

Las expresiones de estas tensiones son las siguientes

$$G_{ijk} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-2\nu^2) (r_{,j} r_{,k} n_i + r_{,i} r_{,k} n_j) + \right. \\ \left. + 4(1-\nu)(1-2\nu) r_{,i} r_{,j} n_k \right] + \left[ (1-2\nu) (\delta_{ik} n_j + \delta_{jk} n_i) - \right. \\ \left. - (4-6\nu) \delta_{ij} n_k \right] - \left[ 2(1-\nu)(1-2\nu) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) + 2\nu \delta_{ij} r_{,k} \right]$$

11.6.30,

$$H_{ij} = \frac{K_o}{16\pi(1-\nu)} \left[ 2\nu r_{,i} n_j \delta_{ij} + (1-2\nu) (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right]$$

El que esta derivada en el interior de la integral, así como las propias integrales, tienen sentido, es evidente, ya que la integral de fuerzas volumen es no singular. Asimismo, las integrales que aparecen despues de la derivación, existen en el sentido de Cauchy, ya que presentan de nuevo una singularidad del tipo débil, ya= tratada.

Para terminar, se verá como se tratan según este esquema algunas de las - fuerzas de volumen más comunes.

(1).- Fuerzas de peso propio

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \quad 11.6.31$$

En este caso es fácil demostrar que  $\underline{X}$  deriva de un potencial, sin más que ver que  $\nabla \times \underline{X} = 0$ . Asimismo la divergencia del vector fuerzas de volumen es constante e igual a cero.

$$\nabla \cdot \underline{X} = K_0 = 0 \quad 11.6.32$$

con lo que en definitiva tendremos que

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega = \frac{-\rho g}{8\pi G} \int_{\delta\Omega} \left[ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} r_{,k} n_3 - r_{,p} n_p \delta_{i3} + r_{i3} n_k \right] ds_y \quad 11.6.33$$

(2).- Fuerzas debidas a bulones de tensión.

En el caso de que existan fuerzas de tensión debidas a un cable de tracción, las consideraremos como fuerzas concentradas en el punto donde se encuentra el bulón de ajuste, por lo que el vector de fuerzas de volumen será

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} \delta(P) \quad 11.6.34$$

donde  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  son las componentes de la fuerza concentrada y  $\delta(P)$  la distribución de Dirac en el punto P donde se encuentra el bulón.

Con ello tendremos inmediatamente que

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = U_{ik}(x, P) \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} \quad 11.6.35$$

sin necesidad de utilizar el esquema anterior.

### (3).- Temperatura

El caso de fuerzas de volumen (Goodier), debido a una distribución de temperaturas en el cuerpo, es algo diferente al tratado hasta ahora, ya que la integral que aparece en la ecuación de contorno tiene una forma algo diferente a la típica tratada hasta ahora (Cruse), quedando en la forma.

$$\frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_{\Omega} U_{ik,i} \theta d\Omega_y \quad 11.6.36$$

donde  $\theta$  corresponde al incremento de temperatura en cada punto de campo y  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica del material.

Disponiendo de nuevo  $U_{ik}$  en función del vector de Galerkin y teniendo en cuenta que la divergencia del rotacional es nula, podemos escribir.

$$\frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_{\Omega} U_{ik,i} \theta d\Omega_y = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \int_{\Omega} \theta x_{ik,lli} d\Omega_y \quad 11.6.37$$

y aplicando a esta última expresión el teorema de Green, sabiendo que para régimen estacionario de temperaturas  $\nabla^2 \theta = 0$  queda

$$\frac{\alpha E}{1-2\nu} \int_{\Omega} \theta U_{ik,i} d\Omega_y = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \int_{\delta\Omega} [\theta x_{ik,il} - x_{ik,i} \theta_{,l}] n_l ds_y \quad 11.6.38$$

que constituye la expresión final buscada.

### III.- APROXIMACION NUMERICA. INTERPOLACION TRIDIMENSIONAL PARABOLICA

#### III.1.- DISCRETIZACION Y TRATAMIENTO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

Una vez establecida la formulación del método, es necesario resolver las ecuaciones que aparecen.

Las ecuaciones integrales que aparecen en el método propuesto no son fácilmente resolubles en forma directa, y en los casos de geometrías y condiciones de contorno complejas es imposible el conseguir una expresión completa para la solución de movimientos y tensiones buscadas. Es necesario pues acudir a un método aproximado.

La filosofía de estos métodos en general, y particularmente del método aquí propuesto, fue desarrollada en el capítulo I, por lo que en este apartado nos limitaremos a aplicarla.

El punto fundamental de esta aplicación se refiere al concepto de discretización, ó interpolación.

Esta consiste en aproximar la función solución (movimientos y tensiones en el contorno, en este caso) como sumatorio de una suma de funciones conocidas por unos coeficientes que suponen las incógnitas del nuevo problema.

$$u_i = \sum_{k=1}^M a_i N^k$$

III.1.1

y análogamente para las tensiones. En III.1.1 las  $N^k$  son las funciones conocidas, definidas en el contorno, y  $a_i$  son las nuevas incógnitas a adoptar. Naturalmente si  $M$  tiende a infinito, y  $u_i$  pertenece a un espacio completo de funciones de las que  $N^k$  forman una base, el problema estaría bien planteado.

En general y como se indicó en el capítulo I, las soluciones  $u_i$  y  $t_i$  se tratan de encontrar en el espacio de Sobolev de orden 2, que es completo. Sólo falta pues definir las funciones  $N^k$  escogidas, lo que se realiza en el apartado III.1.2, limitandonos aquí a apuntar que son funciones de soporte pequeño.

Este soporte de las funciones está íntimamente ligado con la definición de la geometría. Efectivamente, en la mayoría de los casos reales no es posible definir la geometría global de la superficie del cuerpo a través de una ecuación simple, sino que es necesario definirla mediante descomposición en cartas ó trozos de una superficie de expresión fácil, aplicables a  $\mathbb{R}^2$ , y por lo tanto de "manejo fácil" en las ecuaciones integrales.

En muchas ocasiones el contorno es tan complicado que sería necesario un número de cartas tan grande para definirlo, que el proceso no sería económico. Es por ello, que en la mayoría de los casos se prefiere el aproximar la geometría mediante un número relativamente pequeño de cartas con una expresión muy fácil, y que en la medida de lo posible represente suficientemente bien la geometría a efectos de precisión de resultados.

Cada una de estas cartas es lo que denominamos elemento, y vienen definidas por varios puntos (tres en el caso de un triángulo plano, seis en el caso de un triángulo parabólico, etc). Cada uno de estos puntos que definen un elemento se denominará nodo, y a estos nodos son los que están directamente asociadas las

funciones de aproximación de la solución, de forma que el soporte que se asigna a cada una de ellas, coincida con las superficies de los elementos a los que pertenece el nodo al que va asociada.

Con estos conceptos previos de aproximación de geometría y funciones desarrollados en III.1.1 y III.1.2, las ecuaciones integrales van a quedar reducidas a sistemas de ecuaciones lineales, que pueden resolverse en forma estándar.

El cálculo de cada uno de los elementos que componen las matrices que definen el sistema de ecuaciones se realiza en III.2, mientras que la formación de las matrices e introducción de las condiciones de contorno se presentan respectivamente en III.3 y III.4.

Una vez definido el sistema de ecuaciones, es necesario resolverlo. El método elegido para esta resolución es el del gradiente conjugado, que se desarrolla en III.5, completándose el proceso.

Un problema adicional surge cuando el dominio no es homogéneo, sino que está compuesto por varios subdominios homogéneos y diferentes entre sí, ya que en caso de heterogeneidad más distribuida el método no es rentable, ni comparable a elementos finitos.

Este caso es posible tratarlo mediante un proceso de subregionalización, planteando el sistema de ecuaciones integrales para cada una de estas subregiones, e introduciendo a posteriori las condiciones de equilibrio y compatibilidad en las interfases correspondientes.

El proceso de planteamiento de las ecuaciones para cada subregión se detalla en III.1.3, mientras que la introducción de las condiciones en interfase se explica en III.3.



### III.1.1.- APROXIMACION DE LA GEOMETRIA

Una de las fases fundamentales de la discretización consistia en la aproximación de la geometria por un conjunto de cartas denominadas elementos que fuesen trozos de una superficie simple.

En el caso que nos ocupa se ha elegido la aproximación parabólica, por la razón fundamental de que permite aproximar exactamente la mayoría de los casos reales, y en otros acercarse mucho a la realidad.

Los trozos elegidos corresponden a triángulos y cuadriláteros alabeados, definidos respectivamente por seis y ocho nodos (Fig. III.1.1.1).

El problema que se plantea a continuación es la definición de las coordenadas de un punto en el interior de uno de estos elementos, conocidas las coordenadas de los nodos y la situación relativa del punto respecto a éstos.

Esto, que aparece en el proceso de integración numérica como se explica en III.2, se resuelve haciendo uso de la aplicación  $f = \delta \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $\delta \Omega_n$  corresponde a la superficie del elemento n. Aplicación que evidentemente es factible y corresponde a un homomorfismo, debido a la expresión fácil escogida para  $\delta \Omega_n$ , por lo que es derivable, y particularmente es posible calcular el jacobiano de la transformación.

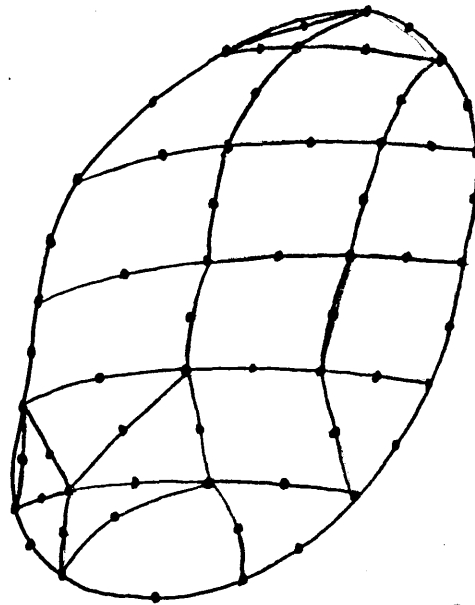


Fig. III.1.1.1

Para unificar criterios en lo que se refiere a triángulos y cuadriláteros se han considerado aquellos como cuadriláteros degenerados en los que se ha condensado un lado, coincidiendo por tanto las coordenadas de tres vértices.

El homomorfismo elegido va a ser el habitualmente utilizado en elementos finitos para cuadriláteros planos de lados parabólicos, que transforma los lados del elemento en los segmentos  $\xi = \pm 1$   $\eta = \pm 1$  en  $\mathbb{R}^2$ .

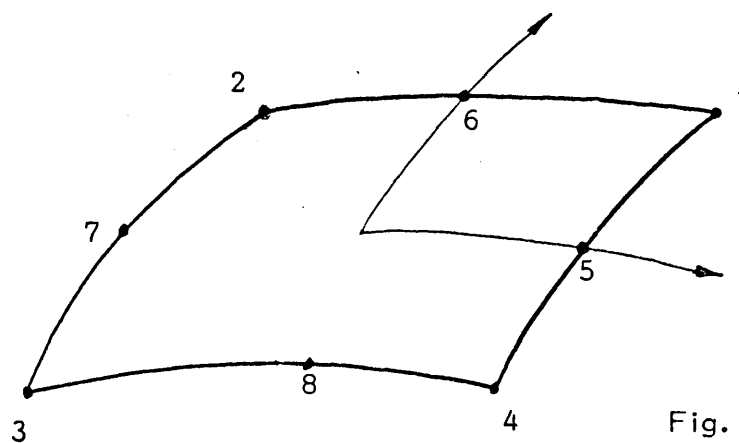


Fig. III.1.1.2 a

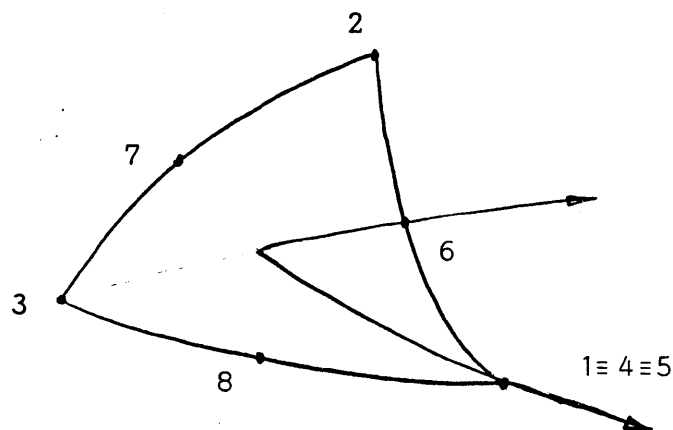


Fig. III.1.1.2 b

donde la numeración de los nodos representa una numeración interna que no se corresponderá con la numeración física de los nodos del elemento superficial.

La expresión de la transformación viene definida a través de las coordenadas nodales  $x_i^n$   $n = 1, 2, \dots, 8$ , y de unas funciones de interpolación  $N^n(\xi, \eta)$  definidas para cada uno de los nodos, como

$$x_i(\xi, \eta) = N^n(\xi, \eta) x_i^n \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{III.1.1.1}$$

donde  $\xi, \eta \in [-1, 1]$  y se denominan usualmente coordenadas intrínsecas ó naturales, y las funciones de forma tienen la expresión siguiente con la numeración indicada en la Fig. III.1.1.2 ,Nodos de vértice,

$$N^n(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad \text{III.1.1.2}$$

con

$$\xi_o = \xi \xi^n$$

III.1.1.3

$$\eta_o = \eta \eta^n$$

nodos intermedios con  $\xi_j = \text{Cte.}$

$$N^n(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi \frac{2}{k}) (1 + \xi_o j)$$

$$n = 5, 6, 7, 8$$

$$j = 1, 2$$

$$k = 2, 1$$

III.1.1.4

Dos de estas funciones para un nodo de vértice y otro de lado intermedio se encuentran representadas en la Fig. III.1.1.3.

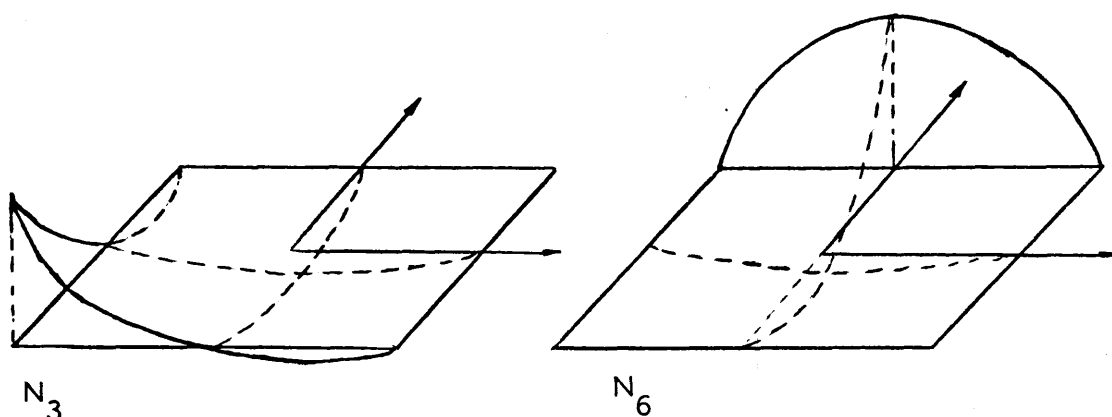


Fig. III.1.1.3

Evidentemente, los elementos pueden ser alabeados de una o dos curvaturas, reglados ó simplemente planos.

Es necesario también el calcular el jacobiano de la transformación para lo cual habrá que calcular previamente las derivadas de las coordenadas cartesianas

respecto a las naturales.

Estas derivadas se deducen inmediatamente de III.1.1.1, quedando

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial N^n}{\partial \xi_j} x_i^n \quad \text{III.1.1.5}$$

donde las derivadas de las funciones de forma son:

nodos de vértice

$$\frac{\partial N^n}{\partial \xi_j} = \frac{1}{4} \xi_j^n (1 + \xi_{oj}) (2\xi_{oj} + \xi_{ok}) \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2 \\ k = 2, 1 \end{matrix} \quad \text{III.1.1.6}$$

nodos intermedios con  $\xi_j = \text{Cte}$

$$\frac{\partial N^n}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} \xi_j^n (1 - \xi_k^2) \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2 \\ k = 2, 1 \end{matrix} \quad \text{III.1.1.7}$$

$$\frac{\partial N^n}{\partial \xi_k} = \xi_k (1 + \xi_{oj})$$

con lo que en definitiva el jacobiano de la transformación quedaría

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

III.1.1.8

donde cada una de las derivadas ha sido definida previamente.

### III.1.2.- APROXIMACION DE LAS FUNCIONES SOLUCION

Habiamos indicado que el hecho de escoger un método aproximado para la resolución del sistema de ecuaciones integrales, implicaba principalmente la aproximación de las funciones solución, movimientos y tensiones, en el contorno por una interpolación, definida en III.1.1, siendo los coeficientes las incógnitas del problema y  $N^k$  las funciones de interpolación, que es necesario elegir.

Usualmente estas funciones se eligen de acuerdo con dos objetivos fundamentales: mejorar la forma del sistema final resultante, y dar a los parámetros  $a_i$  un sentido físico. Así, en elementos finitos se suelen escoger funciones spline que garantizan una matriz en banda y permiten identificar los coeficientes con los movimientos de una serie de nodos.

En elementos de contorno no es posible conseguir una matriz en banda, ya que las funciones de ponderación (tensores de la solución fundamental) están definidas en todo el dominio. Sin embargo con el fin de mantener la segunda consecuencia apuntada, se escogen también funciones spline como funciones de interpolación, es decir polinomios de soporte pequeño, y más concretamente polinomios que tomen el valor 1 en el nodo al que van asociadas y cero en el resto de los nodos, lo que permite una identificación similar a la indicada en elementos finitos.

En nuestro caso hemos seguido la filosofía de elementos isoparamétricos y hemos elegido también funciones parabólicas para aproximar las funciones al igual que hicimos en la geometría.

De esta forma, el valor  $\varnothing$  de una de las funciones ( $u$  ó  $t$ ) en un determinado

punto arbitrario del contorno vendrá definida por

$$\phi = N^n \phi^n \quad n = 1, 2, \dots, n \quad \text{III.1.2.1}$$

y recordando que el soporte de estas funciones estaba reducido a los elementos a los que pertenecía el nodo  $n$  podemos asegurar que esta función  $\phi$  va a depender tan solo de los valores  $\phi^n$  que tome dicha función en los nodos del elemento al que pertenece el punto elegido.

En definitiva tendremos

$$\underline{u}(k) = \begin{Bmatrix} u(k) \\ v(k) \\ w(k) \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{u}^n$$

III.1.2.2

$$\underline{t}(k) = \begin{Bmatrix} t_x(k) \\ t_y(k) \\ t_z(k) \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{t}^n$$

donde

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N^1 & 0 & 0 & N^2 & 0 & 0 & \dots & N^8 & 0 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & 0 & N^2 & 0 & \dots & 0 & N^8 & 0 \\ 0 & 0 & N^1 & 0 & 0 & N^2 & \dots & 0 & 0 & N^8 \end{bmatrix} \quad \text{III.1.2.3}$$



$$I u^n = \begin{Bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ v^1 \\ \vdots \\ w^1 \\ \vdots \\ u^8 \\ \vdots \\ v^8 \\ \vdots \\ w^8 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{t} = \begin{Bmatrix} 1 \\ t_x \\ \vdots \\ t_y \\ \vdots \\ t_z \\ \vdots \\ \vdots \\ t_x^8 \\ \vdots \\ t_y^8 \\ \vdots \\ t_z^8 \end{Bmatrix}$$

III.1.2.4

y los valores de  $N^n$  vienen definidos en II.1.1.2 y II.1.1.4.

### III.1.3.- DISCRETIZACION. FORMULACION MATRICIAL DEL PROBLEMA

La ecuación que rige el comportamiento del medio en la superficie venia dada como

$$(\delta_{ik} - C_{ik}) u_i + \int_{\delta \Omega} T_{ik} u_i ds_y = \int_{\delta \Omega} U_{ik} t_i ds_y + \int_{\delta \Omega} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta \Omega} F_k ds_y \quad \text{III.1.3.1}$$

Considerando que el cuerpo elástico se encuentra compuesto, por un conjunto de subregiones homogéneas  $S^{(r)}$  de diferentes propiedades elásticas, la ecuación III.1.3.1 puede escribirse para cada subregión en la forma

$$(\delta_{ik} - C_{ik}) u_i + \int_{\delta \Omega^{(r)}} T_{ik} u_i ds_y = \int_{\delta \Omega^{(r)}} U_{ik} t_i ds_y + \int_{\delta \Omega^{(r)}} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta \Omega^{(r)}} F_k ds_y \quad \text{III.1.3.2}$$

y deben también tenerse en cuenta las condiciones de equilibrio y compatibilidad de tensiones y movimientos en interfases de subregiones colindantes, definidas como

$$u_i^{(r)}(x) = u_i^{(s)}(x) \quad \text{III.1.3.3}$$

$$t_i^{(r)}(x) = -t_i^{(s)}(x)$$

donde  $x \in \delta \Omega^{(r)} \cap \delta \Omega^{(s)}$

Sustituyendo ahora el contorno continuo  $\delta \Omega^{(r)}$  de cada subregión (r), con -  
 puesto de contorno externo y de interfases con restantes subregiones colindantes, -  
 por uno discretizado formado por p (r) elementos parabólicos  $\delta \Omega_k^{(r)}$  (cuadriláteros ó  
 triángulos), con n nudos cada uno y numerados de 1 a q (r) para cada subregión, de-  
 forma que  $d^{(r)}(b, c)$ , representa la numeración global del nudo c del elemento b de-  
 la subregión r, con

$$b \in [1, 2, \dots, p^{(r)}] \quad , \quad c \in [1, 2, \dots, n] \quad , \quad d \in [1, 2, \dots, q^{(r)}]$$

y teniendo en cuenta la interpolación establecida en III.1.2, podemos -  
 modificar la expresión III.1.3.2 en la forma

$$[(\delta_{ik} - C_{ik}(\alpha)) u_i(\alpha) + \sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n u_i(d^{(r)}(b, c)) \int_{\delta \Omega_b} T_{ik}[x^\alpha, y(\xi, \eta)] .$$

$$. N^c(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n [t_i(d^{(r)}(b, c)) \int_{\delta \Omega_b} U_{ik}[x^\alpha, y(\xi, \eta)] .$$

$$. N^c(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\delta \Omega_b} E_{ik}[x^\alpha, y(\xi, \eta)] X_i(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_{\delta \Omega_b} F_k[x^\alpha, y(\xi, \eta)] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{III.1.3.4}$$

donde  $\alpha$  representa el número del nodo desde el que se integra.

La expresión III.1.3.4 representa 3 ecuaciones integrales por cada nodo y por cada subregión, por lo que se dispondrá de un sistema de 3 q(r) ecuaciones para cada subregión.

Agrupando términos podemos expresar la ecuación anterior en forma matricial como sigue.

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n B_{ik_{bc}}^{\alpha} u_i(d^{(r)}(b,c)) &= \sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n [A_{ik_{bc}}^{\alpha} t_i(d^{(r)}(b,c))] + \\ &+ \sum_{b=1}^{p(r)} P_{k_b}^{\alpha} \end{aligned} \quad \text{III.1.3.5}$$

donde

$$B_{ik_{bc}}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} U_{ik} [x^{\alpha}, y(\xi, \eta)] N^C(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \alpha \neq d^{(r)}(b,c)$$

$$B_{ik_{bc}}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} U_{ik} [x^{\alpha}, y(\xi, \eta)] N^C(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta + [\delta_{ik} - C_{ik}(\alpha)] \quad \alpha = d^{(r)}(b,c)$$

$$A_{ik_{bc}}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} T_{ik} [x^{\alpha}, y(\xi, \eta)] N^C(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$P_{k_b}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} [E_{ik} [x^{\alpha}, y(\xi, \eta)] X_i(\xi, \eta) + F_k [x^{\alpha}, y(\xi, \eta)]] J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{III.1.3.6}$$

La expresión III.1.3.5 representa un sistema de ecuaciones para cada sub-región con  $3.q(r)$  ecuaciones y  $6.q(r)$  incógnitas ( $u_i$  y  $t_i$ ).

Cada tripleta de ecuaciones (k) del sistema, corresponde a la integral desde un nodo  $\alpha$ , mientras que cada tripleta de columnas representan las incógnitas  $u_i$  ó  $t_i$  del nodo  $d^{(r)}(b,c)$  que se esté considerando.

En definitiva la ecuación matricial base del método tiene la forma siguiente= para cada subregión

$$\underline{B}^{(r)} \underline{u}^{(r)} = \underline{A}^{(r)} \underline{t}^{(r)} + \underline{P}^{(r)} \quad \text{III.1.3.7}$$

viniendo los términos de cada una de las matrices B, A, P anteriores definidos en - III.1.3.6.

Así, por ejemplo diremos que la integral desde un nodo  $\alpha$  fijo sobre un elemento b concreto produce  $3(i) \times 3(k) \times 8(c)$ , es decir 72 constantes de integración, para las matrices A y B, y solo 3(k) términos del vector  $\underline{P}$ .

En la expresión III.1.3.7 los movimientos y tensiones están expresados en= coordenadas globales. En general, sin embargo, los posibles datos se encontrarán= en coordenadas elementales, por lo que en la formulación resulta conveniente refle= jar este cambio en u y t.

En general los vectores t se pueden expresar en función del vector local -  $(\sigma, \tau_1, \tau_2)$  en la forma.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \underline{L} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix}$$

III.3.1.8

y análogamente para los movimientos, donde  $\underline{L}$  representa la matriz de cosenos directores de la transformación de coordenadas locales a globales.

Ahora bien, la ecuación III.1.3.7 se establece para todos los nudos de cada subregión (r).

Estableciendo todas las ecuaciones de los nudos de todas las subregiones, e introduciendo en éste las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en los nudos de interfase, se obtiene un sistema de ecuaciones de única solución una vez consideradas las condiciones de contorno.

En forma matricial la ecuación del sistema será

$$\underline{B}' \underline{u} = \underline{A}' \underline{t} + \underline{P} \quad \text{III.1.3.9}$$

donde  $B'$  y  $A'$  corresponden al ensamblaje de todas las matrices  $B^{(r)}$  y  $A^{(r)}$  modificadas por la matriz de transformación  $\underline{L}$  a fin de que  $\underline{u}$  y  $\underline{t}$  puedan venir establecidas en coordenadas globales ó locales.

Para terminar hablaremos del cálculo de los términos  $\sum_{b=1}^{p(r)} B_{ik_{bc}}^{\alpha}$ ;  $\alpha = d^{(r)}(b,c)$

es decir los términos en los que hay que añadir, el tensor  $C_{ik}$ , como se expresó en -  
III.1.3.6. Estos términos pueden calcularse mediante la consideración de un caso  
particular de carga, como es el movimiento del cuerpo como un sólido rígido, sin -  
fuerzas por unidad de volumen.

En este caso todas las tensiones son nulas, por lo que la expresión -  
III.1.3.7 para cada subregión quedará.

$$\underline{B}^{(r)} \underline{u}^{(r)} = 0 \quad \text{III.1.3.10}$$

Si nos fijamos en una sola ecuación de este sistema ( $\alpha$  y  $k$  fijas) tendremos

$$B_{1k_{11}}^{\alpha} u_1^{(r)}(1, 1) + B_{2k_{11}}^{\alpha} u_2^{(r)}(1, 1) \dots + B_{1k_{bc}}^{\alpha} u_1^{(\alpha)} + \\ + B_{2k_{bc}}^{\alpha} u_2^{(\alpha)} + \dots + B_{3k_q}^{\alpha} u_q^{(r)}(q, 8) = 0 \quad \text{III.1.3.11}$$

de la que se deduce inmediatamente el cálculo de los términos de la diagonal princi -  
pal. Así pues, si damos el movimiento como sólido rígido  $u_i = (1, 0, 0)$ , y despeja -  
mos el término buscado se tiene.

$$\sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n \delta_{\alpha}^{(r)}(b, c) B_{1k_{bc}}^{\alpha} = \sum_{b=1}^{p(r)} \sum_{c=1}^n (1 - \delta_{\alpha}^{(r)}(b, c)) B_{1k_{bc}}^{\alpha}$$

$$\text{III.1.3.12}$$

y análogamente para los otros dos términos correspondientes a  $i = 2$  e  $i = 3$ , y para -  
el resto de ecuaciones integrales.

### III.2.- CALCULO DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION

#### III.2.1.- INTRODUCCION

Como se vió en el apartado anterior, una vez desarrollado el método y después de la realización de la discretización del contorno, es necesario el calcular una serie de integrales que podemos resumir en la forma siguiente:

$$A_{ik_{bc}}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} U_{ik} N^c ds_y$$

$$B_{ik_{bc}}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} T_{ik} N^c ds_y$$

III.2.1.1

$$P_{k_b}^{\alpha} = \int_{\delta \Omega_b} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta \Omega_b} F_k ds_y$$

Naturalmente, estas integrales podrían realizarse analíticamente, como en los casos de aproximación constante o lineal, pero debido a la dificultad del elemento parabólico, la consecución de esas integrales es casi imposible en forma analítica, por lo que se ha decidido el realizarlas de forma numérica.

Por otro lado, y recordando la singularidad que aparecía en los tensores  $U_{ik}$   $T_{ik}$  para el caso de que la distancia entre el punto desde el que se integra, y el elemento sobre el que se integra tendía a cero, aunque esa dificultad se salvaba mediante la consideración de las integrales en el sentido de Cauchy (II.4) es obvio=



que en una integración numérica se producirán malos resultados cuando se integre desde un punto muy próximo al elemento, y más aún, por supuesto, cuando el nodo pertenezca a dicho elemento.

Se hace pues, necesario, el realizar una integración más precisa a medida que la distancia nodo-elemento es menor, y particularmente cuando ésta es cero, es decir, cuando el nodo pertenece al elemento (integración adaptativa).

El problema de cálculo de estas tres integrales se reduce pues a la integración de una función  $f(x, y, z)$  en la superficie  $\delta\Omega_b$  de un elemento.

Realizando el cambio de coordenadas, de forma que tratemos el problema en coordenadas intrínsecas  $\xi, \eta$  dentro del elemento, como se ha indicado en el apartado III.1.3, la integral quedará con los límites normalizados entre -1 y +1 en la forma

$$\int_{\delta\Omega_b} f(x, y, z) ds_y = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

### III.2.1.2

donde  $J(\xi, \eta)$  es el jacobiano de la transformación que en el caso de elementos parabólicos es variable para cada punto del elemento y cuyo cálculo se realizó en el apartado III.1.1.

El procedimiento que se ha seguido para resolver las integrales del tipo III.2.1.2 es el de cuadratura de Gauss, por lo que previamente al desarrollo del procedimiento seguido en el cálculo de dichas constantes daremos unas muy breves ideas sobre este tipo de integración.

### III.2.2.- PUNTUALIZACIONES SOBRE LA CUADRATURA DE GAUSS

El objetivo de este apartado no responde, a la idea de un tratamiento completo sobre las reglas de integración de Gauss, que han sido suficientemente tratadas por múltiples autores [38], [45], [117], sino exclusivamente justificar algunos resultados que se han empleado en el proceso que sigue.

Una regla de integración de Gauss Legendre que es la que vamos a usar corresponde fundamentalmente a una aproximación de la integral en la forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad \text{III.2.2.1}$$

donde  $w_k$  corresponde a unos valores determinados, denominados pesos de la cuadratura y  $x_k$  son también abscisas determinadas con  $a < x_k < b$ .

El estudio de la convergencia de las cuadraturas de Gauss cuando  $n \rightarrow \infty$  puede verse por ejemplo en [117].

Naturalmente el incremento de precisión en una cuadratura del tipo anterior se consigue aumentando el número de puntos de Gauss, ya que elegido éste, quedan automáticamente determinados pesos y abscisas.

El tema es pues complejo, en un problema general donde existen distintas necesidades de aproximación. En el método de los elementos de contorno que nos ocupa es evidente que al depender las funciones integrando de  $\frac{1}{r}$  y  $\frac{1}{r^2}$ , será necesario un mayor número de puntos de integración cuando se integra desde un nodo sobre un elemento muy cercano a él, ya que el gradiente de variación de la función

es muy elevado. La solución a este problema que se ha adoptado es, la de seguir un método de integración adaptativo en el sentido de modificar el número de puntos de Gauss en la integración sobre cada elemento de acuerdo con las necesidades de precisión.

Este procedimiento automático de integración genera los nodos y pesos sin interferencia exterior. Consigue también el resultado numérico hasta una cierta exactitud prefijada.

La filosofía del método pues, consiste fundamentalmente en subdividir el intervalo de integración (elemento) en un cierto número de subintervalos (subelementos)  $D_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , número que puede especificarse por el usuario ó por el mismo programa, de acuerdo con unos criterios de acotación del error de integración, y que puede ser variable para cada uno de los intervalos de acuerdo con las normas de exactitud preestablecidas.

Naturalmente para poder establecer estos sistemas de error se ha de suponer en principio una cuadratura fija para la integración sobre cada uno de estos elementos, cuadratura que normalmente suele ser de bajo orden.

Se consigue así, el número de subintervalos apropiado, es decir aquél en que el error no es grande ni demasiado pequeño de acuerdo con la exactitud requerida. Así, si el error es mayor que  $e/n$  donde  $e$  es el error prefijado para el intervalo total, no podremos garantizar la pretensión inicial, mientras que si el error es demasiado pequeño se ha realizado una serie de cálculos innecesarios que aumentan el costo de la operación.

A continuación se estudia cada uno de estos subintervalos, ya que puede ser

que en algunos de ellos sea efectivamente necesaria una integración con el número de puntos de Gauss inicialmente fijado, pero no en otros, pudiéndose rebajar este número y con ello aumentar la velocidad del proceso.

Este proceso continuado permite el dividir todos los elementos y fijar el número de puntos de integración en cada uno de los subelementos de forma que el error de integración se encuentre debajo de una cota prefijada.

Es necesario pues, definir tanto la cota del error como el error mismo. La primera de ellas se fija con unos criterios dictados por las características del método de los elementos de contorno, definiéndose, en el apartado III.2.3, mientras que el error que se consigue en una cuadratura de Gauss con un número de puntos  $n$  se calcula a continuación.

### III.2.2.1.- ERROR EN UNA CUADRATURA DE GAUSS

Olvidándonos de los errores propios del método de los elementos de contorno ; como son los debidos a la aproximación de la geometría, al proceso de discretización, y los debidos al resto de los procesos que intervienen en la aplicación del método, como son:

- Aproximaciones realizadas en el tratamiento de interfases (III.3).

- Aproximaciones en el tratamiento de condiciones de contorno (III.4).

- Error en la resolución del sistema de ecuaciones (III.5).

nos centraremos tan solo en los errores que aparecen en el proceso de integración - que son los que nos van a servir para realizar la subdivisión indicada en el apartado anterior.

Existen dos clases de errores fundamentales en todo proceso de integración numérica, que corresponden a los denominados "errores de redondeo y truncamiento".

Los primeros son de muy difícil evaluación, existiendo toda una teoría probabilística en el cálculo de éste tipo de error. Su tratamiento además es muy complejo y prácticamente se encuentran totalmente encubiertos por el resto de errores de redondeo que aparecen en el proceso completo.

El error de truncamiento sin embargo corresponde precisamente al error que se cometería al integrar una determinada función en un determinado intervalo, supuesto que ésta se realiza "exactamente" mediante un proceso de integración numérica de Gauss. Es decir el error

$$E = \left[ \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n \tilde{w}_x f(x_k) \right] \quad \text{III.2.2.1.1}$$

Este error sí es calculable, o al menos de fácil acotación, y es el que va directamente asociado al proceso de integración pudiéndose mejorar mediante un aumento conveniente del número de puntos de integración. Será pues el que nos servirá para realizar el proceso de subdivisión anteriormente descrito.

El cálculo del error de truncamiento suele realizarse mediante dos métodos distintos: acotación mediante las derivadas de la función subintegrando, y mediante la teoría de funciones analíticas. Nos vamos a centrar exclusivamente en el primero, pues, como se ve en III.2.3, es el más apropiado para el tipo de funciones integrando que vamos a manejar. Un detallado estudio de ambos tipos de errores puede verse por ejemplo en [38].

Sea  $f$  la función integrando con  $f \in C^{2n} [a, b]$  donde  $n$  es el número de puntos de Gauss de la cuadratura que vamos a definir, y  $[a, b]$  el intervalo en el que vamos a integrar.

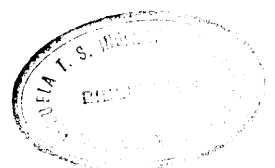
Definiremos un espacio seminormado

$$X = \{ f \in C^{2n} [a, b] \} \quad \text{III.2.2.1.2}$$

en el que se define la seminorma

$$\| f \|^2 = \int_a^b | f^{(n+1)}(x) |^2 dx \quad \text{III.2.2.1.3}$$

Sea  $E \in X'$  el funcional lineal definido sobre  $X$



$$(E: X \rightarrow \mathbb{R}) \quad (E(f) = \int_a^b f(x) - \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)) \quad \text{III.2.2.1.4}$$

donde  $w_k$  y  $a < x_k < b$  son fijos y correspondientes a los pesos y abscisas de la cuadratura de Gauss de  $n$  puntos, por lo que

$$(E(p(x)) = 0) \quad (\forall p(x) \in P_n) \quad \text{III.2.2.1.5}$$

siendo  $P_n$  el conjunto de polinomios de grado  $n$ .

Entonces se tiene

$$(\forall f \in X) \quad (E(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x) K(x) dx) \quad \text{III.2.2.1.6}$$

donde  $K(x)$  se denomina nucleo de Peano y tiene la forma

$$K(x) = \frac{1}{n!} E_t [(t-x)_+^n] \quad \text{III.2.2.1.7}$$

y

$$(t-x)_+^n = \begin{cases} (t-x) & t \geq x \\ 0 & t < x \end{cases} \quad \text{III.2.2.1.8}$$

La notación  $E_t$  significa que el funcional  $E$  se aplica a la variable  $t$  en  $(t-x)_+^n$ .

Este teorema denominado de Peano es la base de cálculo del error de truncamiento, y su demostración puede encontrarse por ejemplo en Engels [45].

El nucleo  $K(x)$  es evidentemente de clase  $C^{n-1}$   $[a, b]$  y corresponde a una-

función spline con soporte en  $[a, b]$ .

Si aplicamos a la expresión III.2.2.1.6 la desigualdad de Schwartz podemos escribir

$$|E(f)| \leq \frac{1}{n!} \left( \int_a^b |f^{(n+1)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |K(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|E(f)| \leq \frac{1}{n!} \|f\| \left( \int_a^b |K(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{III.2.2.1.9}$$

$$\|E(f)\| \leq \frac{1}{n!} \left( \int_a^b |K(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{III.2.2.1.10}$$

Hemos obtenido pues la norma del operador, así como una cota para él que era precisamente lo que se iba buscando.

El teorema de Peano es de gran generalidad, pero el precio que se ha de pagar es el cálculo del núcleo  $K(x)$  según la expresión III.2.2.1.7. Para el caso de cuadratura de Gauss este núcleo está tabulado en Stroud y Secrest [117].

Sin embargo para este caso particular puede llegarse a una simplificación que permite trabajar más cómodamente, particularmente con un método adaptativo como el propuesto en II.2.1 que necesita de una acotación del error fácil de usar.

Esta simplificación viene definida por el siguiente teorema.



Sea  $f(x) \in X$ , entonces

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)! K_n^2} \quad a < \eta < b$$

III.2.2.1.11

La demostración es simple y la reproducimos a continuación de Davis y Rabinowitz [38].

Si  $h_{2n-1}$  es el único polinomio de clase  $P_{2n-1}$  para el cual

$$h_{2n-1}(x_k) = f(x_k)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad \text{III.2.2.1.12}$$

$$h'_{2n-1}(x_k) = f'(x_k)$$

se puede escribir de acuerdo con el teorema elemental de interpolación de polinomios

$$f(x) = h_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2$$

III.2.2.1.13

donde  $f^{(2n)}$  es continua pues  $f \in C^{2n}$ .

Integrando esta expresión entre  $a$  y  $b$  y empleando el teorema del valor medio en la integral que corresponde a  $f^{(2n)}$  tenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b h_{2n-1} dx + \frac{f^{(2n)}(\eta)}{2n! K_n^2} \quad \text{III.2.2.1.14}$$

donde

$$K_n^2 = \int_a^b (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 dx \quad \text{III.2.2.1.15}$$

que corresponde al coeficiente de normalización del polinomio de Legendre de grado  $n$ . En el caso de  $a = -1$  y  $b = 1$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las abscisas de la cuadratura de Gauss toma el valor

$$K_n^2 = \frac{1}{2^n} \quad \text{III.2.2.1.16}$$

Teniendo en cuenta por último que

$$\int_a^b h_{2n-1} dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad \text{III.2.2.1.17}$$

ya que la regla de Gauss de  $n$  puntos integra exactamente polinomios de grado hasta  $2n - 1$ .

Sustituyendo III.2.2.1.16 y III.2.2.1.17 en III.2.2.1.14 se obtiene la expresión final para el error en el caso de cuadratura de Gauss - Legendre

$$E = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{2n! 2^n} \quad \text{III.2.2.1.18}$$

de la que se hará uso en los apartados siguientes

### III.2.3.- SUBDIVISION EN SUBELEMENTOS. CALCULO DE INTEGRACION DE LOS PUNTOS DE INTEGRACION EN CADA ELEMENTO

La integral III.2.1.2 es la que habrá que realizar numéricamente con la mayor precisión posible dentro de la economía y de acuerdo con las premisas anteriores. Para conseguir esta precisión se puede seguir un proceso de subdivisión del elemento en distintos subelementos, de forma que dentro de cada uno de ellos se realice la integración numérica, con lo cual podría aumentarse el número de puntos de integración en el elemento global.

Es decir, puede considerarse esta integral  $I$  como la suma de distintas integrales parciales en la forma

$$I = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} I_{ij} \quad \text{III.2.3.1}$$

donde  $I_{ij}$  representa la integración sobre el subelemento  $i, j$  y  $N_1$  y  $N_2$  son el número de subelementos en la dirección correspondiente a  $\xi$  y  $\eta$  respectivamente (Fig. III 2.3.1)

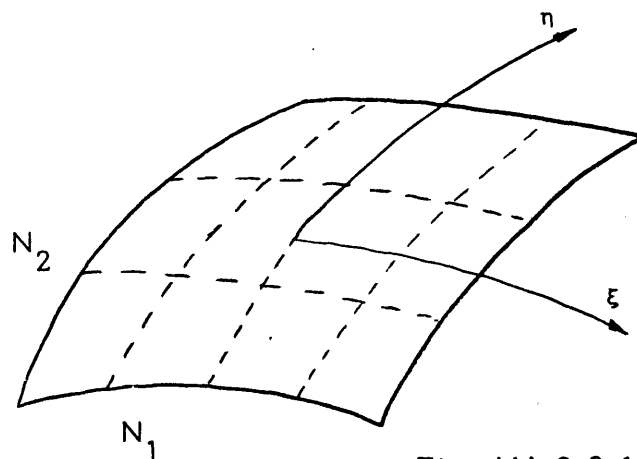


Fig. III.2.3.1

La integral numérica de la función sobre cada subelemento se realizará según el esquema de integración de Gauss, con puntos de integración normalizados entre -1 y 1. En nuestro caso las coordenadas del elemento global están normalizadas, pero no las de cada subelemento. Es pues necesario el realizar una segunda transformación de coordenadas, de intrínsecas elementales a intrínsecas subelementales.

Esta transformación viene definida por la expresión

$$\xi_{el_i} = \frac{\xi_{sub_i}}{N_i} + Cte. \quad \text{III.2.3.2}$$

donde la constante representa la coordenada intrínseca elemental para el punto del subelemento donde  $\xi_{sub_i} = 0$ , es decir, el centro de gravedad del subelemento.

En definitiva, si queremos trabajar en coordenadas subelementales, de forma que estas varíen entre -1 y 1, para poder aplicar la cuadratura de Gauss, en cada uno de ellos, será también necesario el multiplicar cada integral  $I_{ij}$  por el jacobiano de la transformación que es

$$J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_{el}}{\partial \xi_{sub}} & \frac{\partial \xi_{el}}{\partial \eta_{sub}} \\ \frac{\partial \eta_{el}}{\partial \xi_{sub}} & \frac{\partial \eta_{el}}{\partial \eta_{sub}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{N_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{N_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{N_1 N_2}$$

III.2.3.3

Con ello la integral III.2.3.2 quedará en la forma

$$I = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} I_{ij}(\xi_{\text{sub}}, \eta_{\text{sub}}) \quad \text{III.2.3.4}$$

donde ahora si es posible calcular cada integral  $I_{ij}$  aplicando la cuadratura de Gauss usual.

Así, si para el subelemento  $i, j$  elegimos  $\lambda_1(i, j)$  puntos de Gauss en la dirección  $\xi$  y  $\lambda_2(i, j)$  puntos en la dirección  $\eta$  y los pesos de cada punto  $k_l$  de la malla definida en el subelemento  $i, j$  los denominamos como  $w_k^{\lambda_1(i,j)}$ ,  $w_l^{\lambda_2(i,j)}$  para cada una de las direcciones respectivamente, cada una de las integrales  $i, j$  quedará en la forma

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi_{\text{sub}}, \eta_{\text{sub}}) d\xi_{\text{sub}} d\eta_{\text{sub}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\lambda_1(i,j)} \sum_{l=1}^{\lambda_2(i,j)} w_k^{\lambda_1(i,j)} w_l^{\lambda_2(i,j)} \cdot F(\xi_{\text{sub}}^k, \eta_{\text{sub}}^l) \end{aligned} \quad \text{III.2.3.5}$$

y la integral total III.2.3.1 por tanto

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi_{\text{el}}, \eta_{\text{el}}) d\xi_{\text{el}} d\eta_{\text{el}} = \quad \text{III.2.3.6}$$

$$= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{\lambda_1(i,j)} \sum_{l=1}^{\lambda_2(i,j)} w_k^{\lambda_1(i,j)} w_l^{\lambda_2(i,j)} \cdot F(\xi_{\text{sub}}^k, \eta_{\text{sub}}^l)$$

Naturalmente, para la cuadratura de Gauss,  $\lambda_1, \lambda_2$ , elegida para cada subelemento, vienen fijados directamente los pesos  $w_k^{\lambda_1}, w_l^{\lambda_2}$ , así como las coordenadas  $(\xi_{sub}^k, \eta_{sub}^l)$  de cada punto de integración ó lo que es lo mismo también las coordenadas elementales de cada punto de integración que venían dadas en función de las anteriores por la expresión III.2.3.2. Esta expresión algo más desarrollada puede expresarse como

$$\xi_{el}^{i,j,k} = 1 + \frac{1 - 2i + \xi_{sub}^k}{N_1}$$

III.2.3.7

$$\eta_{el}^{i,j,l} = 1 + \frac{1 - 2j + \eta_{sub}^l}{N_2}$$

vinendo  $\xi_{sub}$  y  $\eta_{sub}$  definidas, como se ha dicho, por la cuadratura de Gauss correspondiente.

En definitiva, se observa que para realizar la integración, es necesario el cálculo de los valores  $N_1, N_2, \lambda_1(i,j), \lambda_2(i,j)$  y el cálculo de la función  $F$  en cada punto de integración. El número de subelementos en cada dirección, y el número de puntos de integración a utilizar en cada dirección de cada subelemento, se realiza mediante un proceso de subdivisión que se detallará seguidamente.

La función  $F$  por otro lado, variará de acuerdo con la integral a calcular, según sea la correspondiente a  $A_{ij}^n, B_{ij}^n$  ó  $F_i$  y su cálculo se estudiará en el epígrafe III.2.4.

El número de subelementos y de puntos de integración en cada uno de ellos se realiza de acuerdo con la premisa de conseguir una integración con un error in-

ferior a una prefijado, igual para todas las integrales que se realizan. El criterio de acotación del error de integración elegido es el propuesto por Stroud y Secrest, y citado en III.2.2.

El proceso consistiría pues en elegir una cota de error máxima e ir calculando las derivadas  $2\lambda_i$ -ésimas del integrando hasta que una de ellas fuere menor que la cota elegida.

En nuestro caso, sin embargo, y debido a la complejidad de los integrandos es prácticamente imposible el cálculo de las derivadas  $2\lambda_i$ -ésimas para cada una de las integrales propuestas. Por ello, se va a utilizar una expresión simplificada del integrando que corresponde al término de los integrandos que más rápidamente varía en las proximidades de la singularidad, es decir el orden mayor de singularidad de las funciones integrando, que evidentemente corresponde a la mayor fuente de error en estas integrales. Este término es  $\frac{1}{r^2}$  para las funciones subintegrales que nos ocupan. Trabajaremos con este término a partir de este momento.

Aún con esta simplificación, las derivadas  $2\lambda_i$ -ésimas respecto a  $\xi$  y  $\eta$  son muy complicadas en elementos parabólicos, por lo que es necesario añadir otra serie de simplificaciones.

Así, si suponemos que el elemento no es muy distorsionado, lo que ocurre normalmente, ya que en caso contrario significaría una mala discretización, y por tanto malos resultados, el régimen de variación del jacobiano  $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  para cada dirección, y en las zonas cercanas a la singularidad, será pequeño frente a la variación de  $\frac{1}{r^2}$  respecto a  $\xi_i$ . Considerándolo constante podríamos escribir.

$$\frac{\partial^{2\lambda_i} \left( -\frac{1}{2} \right)}{r^{2\lambda_i}} = \frac{\partial^{2\lambda_i} \left( -\frac{1}{2} \right)}{r^{2\lambda_i}} \left( \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right)^{2\lambda_i} \quad \text{III.2.3.8}$$

Suponiendo también que la derivada  $2\lambda_i$ -ésima de  $\left( -\frac{1}{2} \right)$  respecto a  $s$  en el punto del elemento más cercano al nodo desde el que se integra, nunca es mayor que la derivada  $2\lambda_i$ -ésima con respecto a  $r$  (vease Fig. III.2.3.2), se tendría

$$\left| \frac{\partial^{2\lambda_i} \left( -\frac{1}{2} \right)}{r^{2\lambda_i}} \right| \leq \frac{\partial^{2\lambda_i} \left( -\frac{1}{2} \right)}{r^{2\lambda_i}} \left( \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right)^{2\lambda_i} =$$

$$= \frac{(2\lambda_i + 1)!}{2\lambda_i + 2} \left( \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right)^{2\lambda_i} \quad \text{III.2.3.9}$$

y el valor mayor, de esta derivada, corresponderá, evidentemente al punto con distancia  $r$  al nodo desde el que se integra menor. Así:

$$\text{ERROR} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{k=1}^{\lambda_1} \sum_{l=1}^{\lambda_2} w_k^{\lambda_1} w_l^{\lambda_2} F(\xi_k, \eta_l) \approx$$

$$\approx \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} J d\xi d\eta - \sum_{k=1}^{\lambda_1} \sum_{l=1}^{\lambda_2} w_k^{\lambda_1} w_l^{\lambda_2} \frac{1}{r^2(\xi_k, \eta_l)} \quad \xi$$



$$\leq 2 G J \sum_{i=1}^2 \frac{(2\lambda_i + 1)!}{2^{\lambda_i} \lambda_i!} \left( \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right)^{2\lambda_i} \frac{1}{R^{2\lambda_i + 2}} \quad \text{III.2.3.10}$$

Denominando ahora

$$\alpha_i = \frac{\left( \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right)^{2\lambda_i}}{2R} \quad \text{III.2.3.11}$$

es facil deducir de la anterior

$$\text{ERROR} \leq \frac{2 G J}{R^2} \sum_{i=1}^2 (2\lambda_i + 1) \alpha_i^{2\lambda_i} \quad \text{III.2.3.12}$$

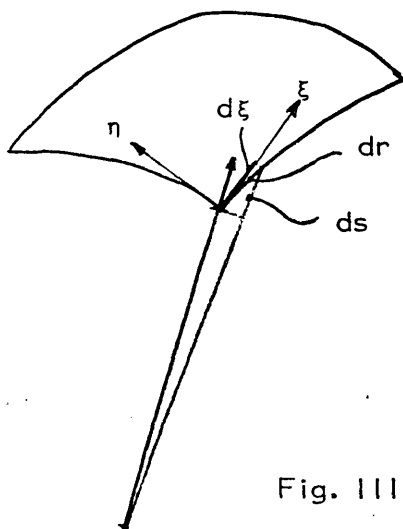


Fig. III.2.2.2

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} < 1 \quad \frac{\partial f}{\partial s} < \frac{\partial f}{\partial r}$$

El error máximo que puede ocurrir queda ya determinado por la expresión -  
 III.2.3.12. Es necesario ahora elegir una cota de error de forma que éste esté -  
 siempre debajo de aquella.

Esta cota se elegirá variable, de forma que sea proporcional al producto del  
 área del elemento, (lo que en principio indica que el error de integración será menor  
 para elementos más pequeños, y al inverso del cuadrado de la distancia mínima , -  
 (errores mayores para distancias menores), lo que es razonable.

En definitiva

$$COTA = K \frac{1}{R^2} \cdot \text{Area} \quad \text{III.2.3.13}$$

Si ahora expresamos que el error debe ser menor que la acotación anterior  
 tendremos

$$\frac{2 G J}{R^2} \sum_{i=1}^2 (2 \lambda_i + 1) \alpha^{2 \lambda_i} \leq K \frac{1}{R^2} \cdot \text{Area} \quad \text{III.2.3.14}$$

y recordando que el jacobiano se consideraba constante, este será proporcional al  
 área del elemento (en el caso plano que el jacobiano sí es constante se tiene  $J = \frac{\text{AREA}}{4}$ )  
 por lo que en definitiva se tendrá

$$\sum_{i=1}^2 (2 \lambda_i + 1) \alpha^{2 \lambda_i} \leq 2 \text{ Cte.} \quad \text{III.2.3.15}$$

y si suponemos aproximadamente iguales los errores en cada dirección, para cada=  
 una de ellas la acotación vendrá definida por

$$(2\lambda_i + 1) \alpha_i^{2\lambda_i} \leq \text{Cte} \quad \text{III.2.3.16}$$

Esta constante está fijada por la experiencia y está relacionada con el número de puntos de Gauss que es necesario situar en un arco de un radián para conseguir un error igual al definido por III.2.3.12, integrando desde el centro.

Efectivamente, en el caso de este arco  $r = R$  para todo punto y

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{L}{2} = \frac{R}{2} \text{ para el arco de un radián.}$$

Por tanto

$$\alpha_i = \left( \frac{\frac{R}{2}}{2R} \right)^{2\lambda_i} = \frac{1}{4^{2\lambda_i}}$$

III.2.3.17

$$\text{Cte} = (2\lambda_i + 1) \frac{1}{4^{2\lambda_i}}$$

donde  $\lambda_i$  es el número de puntos de integración requeridos para conseguir una cota de error igual a la anterior en el arco de un radian.

Resumiendo, para llegar a la expresión III.2.3.16 se han seguido una serie de simplificaciones, entre las que se encuentran

(1).- Se establece el error máximo para la función  $\left( -\frac{1}{r^2} \right)$  que corresponde a la mayor singularidad de las funciones integrales.

(2).- El jacobiano de la transformación coordenadas cartesianas-coordenadas naturales se considera constante en las proximidades del punto más cercano del elemento al nodo desde el que se integra.

(3).- Se supone que la variación de  $r$  respecto a  $s$  es inferior a la variación respecto a  $r$ , lo que es cierto para elementos poco distorsionados.

En cuanto a la cota elegida para el error los supuestos son:

(1).- Es igual en ambas direcciones.

(2).- Es proporcional al producto de  $\frac{1}{R^2}$  por el área del elemento.

Una vez definida la acotación del error, es necesario proceder al cálculo de puntos de integración  $\lambda_i$  en cada dirección que cumple III.2.3.16.

Para ello se ha de calcular previamente la distancia mínima del punto al elemento,  $R$  y el valor de  $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  que aparecen en III.2.3.16 (naturalmente supuesta fijada la constante), y a continuación se procede a la subdivisión. En los epígrafes siguientes, se estudiará brevemente el procedimiento de cálculo de las magnitudes anteriores y a continuación el proceso de subdivisión, tanto en nodos situados fuera del elemento sobre el que se integra como situados en él.

### III.2.3.1.- CALCULO DE LA DISTANCIA MINIMA DE UN PUNTO A UN ELEMENTO

El proceso de cálculo es de forma iterativa, tratando de encontrar el punto del elemento, que es intersección de la normal a la superficie del elemento, trazada desde el punto de integración, en dicho elemento, que, evidentemente será el punto de distancia mínima al nodo singular, con la salvedad de considerar elementos poco degenerados.

En el caso más usual de que la normal a la superficie parabólica, que definen los nodos del elemento, no intersecte sobre él, se considerará el punto del elemento más cercano al punto intersección ideal (vease Fig. III.2.3.1.1)

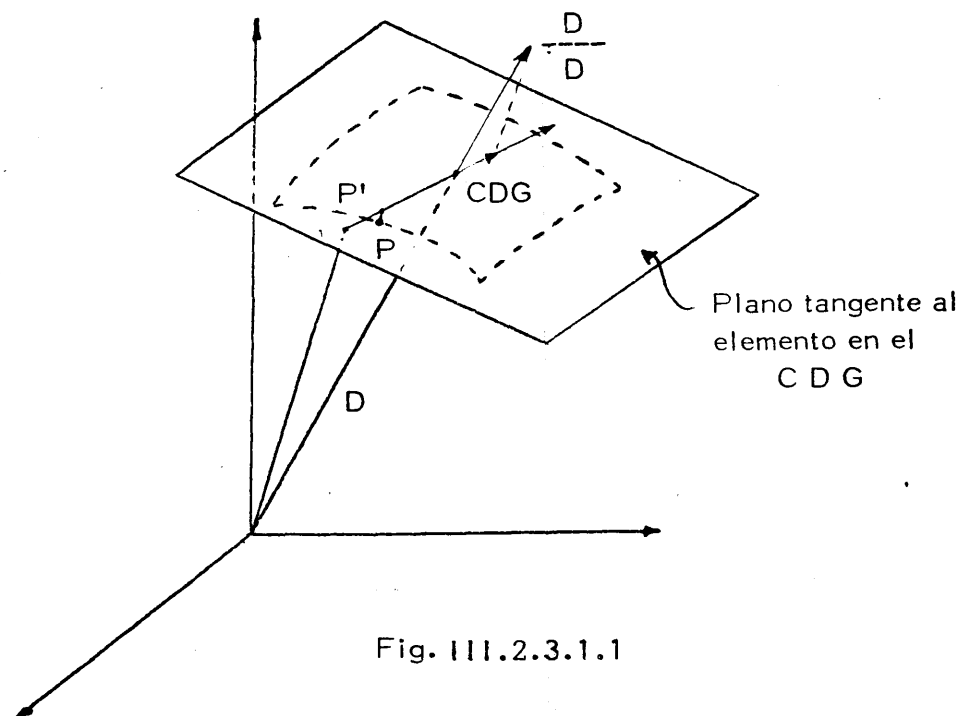


Fig. III.2.3.1.1

El proceso comienza calculando la distancia del nodo a un punto inicial del elemento, por ejemplo el centro de gravedad de este ( $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ), así como el vector unitario de dicha distancia.

A continuación, se calcula la dirección, en coordenadas intrínsecas de la proyección de la distancia  $D$  sobre el plano tangente al elemento en el punto anterior  $P$  (CDG en la Fig. III.2.3.1.1). Naturalmente, esto se reduce a calcular las coordenadas del vector distancia  $D$ , en las direcciones intrínsecas en el punto anterior, mediante la realización de los productos escalares.

$$D_{\xi} = \underline{D} \cdot \underline{\xi}$$

III.2.3.1.1

$$D_{\eta} = \underline{D} \cdot \underline{\eta}$$

donde los vectores  $\xi$  y  $\eta$  son los vectores tangentes a las direcciones intrínsecas en el punto considerado, cuyo cálculo se estudia en III.2.3.2.

Una vez realizado este cálculo, se procede a un cambio de la situación del punto inicial de tanteo, de forma que se considere el punto  $P$ , o en su defecto al punto del elemento más próximo a  $P$  en la dirección de la proyección de la distancia (punto  $P'$ ).

En el caso de que el cambio en coordenadas intrínsecas a realizar sea muy grande, se considera que la aproximación del elemento por el plano tangente no es buena, y se procede a un cambio gradual, cambiando el punto inicial a otro punto en la dirección de la proyección, pero en el que el cambio de coordenadas sea pequeño.

Una vez modificada en esta forma la situación del punto inicial, se repite el proceso tomando este nuevo punto como inicial, hasta llegar a un punto satisfactorio, entendiendo como tal, aquél en el que el cambio producido en la distancia por la modificación a un nuevo punto es insignificante.

Naturalmente, si el punto  $P$  se encuentra dentro del elemento, la proyección de la distancia  $D$  sobre el plano tangente es nula y finaliza el proceso.

### III.2.3.2.- CALCULO DE LAS VARIACIONES $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$ Y DEL JACOBIANO J

Para calcular estas variaciones que aparecían en la expresión III.2.3.16, es necesario el cálculo previo de los vectores  $\underline{\xi}$  y  $\underline{\eta}$  tangentes a las direcciones intrínsecas en un punto del elemento, ya utilizados en el epígrafe anterior.

Estos vectores vienen dados por

$$\underline{\xi}_i(P) = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}_{\xi_i}^P = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_i} \end{Bmatrix}^P \quad \text{III.2.3.2.1}$$

derivadas que venían definidas en III.1.1.6 y III.1.1.7

El cálculo de la normal al elemento en cuestión en el punto considerado se - realizará sin más que efectuar el producto vectorial de los dos vectores tangentes -  $\underline{\xi}$  ,  $\underline{\eta}$  .

Con estos calculos previos ya es posible la consecución de los valores buscados, éstos son.

$$\left| \frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right| = \left| \underline{\xi}_i \right| \quad \text{III.2.3.2.2}$$

$$\left| J \right| = \left| \underline{n} \right| = \left| \underline{\xi} \times \underline{\eta} \right|$$



es decir los módulos de los vectores anteriormente calculados.

Una vez conocidos  $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  y R es posible el estudio de la subdivisión del elemento según el esquema indicado en III.2.3.3.

### III.2.3.3.- PROCESO DE SUBDIVISION DE UN ELEMENTO CUANDO EL NODO DESDE EL QUE SE INTEGRA NO PERTENECE A DICHO ELEMENTO

Este proceso que parte de el criterio de acotación del error de integración descrito en III.2.3 y cuyo resultado fue la ecuación III.2.3.16 calcula el número de subelementos a dividir el elemento inicial y el número de puntos de integración a introducir en cada uno de ellos.

Evidentemente, lo primero que se hace es definir los valores que aparecen en III.2.3.16. Así, la Cte estará dada inicialmente, y el cálculo de la distancia mínima del nodo al elemento,  $R$ , y el punto del elemento que se encuentra a esta distancia mínima, y al mismo tiempo los valores de  $-\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  en ese punto, y con ello  $\alpha_i$ , en cada dirección, se realizan según III.2.3.1 y III.2.3.2.

A continuación se supone un número máximo de puntos de integración en cada dirección (consideramos 6, por ejemplo, en el programa presentado) y se calcula  $(2\lambda_i + 1)\alpha_i^{2\lambda_i}$ . Si este valor es inferior a la constante prefijada, se podría conseguir un error inferior al permitido con un solo subelemento en esa dirección y 6 puntos de integración o menos. En caso contrario es necesario aumentar el número de columnas de subelementos en la dirección tratada, con lo cual se conseguiría aumentar el número de puntos de integración (recuérdese que el máximo número de estos puntos permitidos es de 6 en cada dirección y por subelemento).

En una primera subdivisión se consideran dos columnas de subelementos con lo que  $\xi_{i_{sub}} = 2\xi_{i_{el}} + K$  según III.2.3.2, y  $-\frac{\partial s}{\partial \xi_{sub}} = \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \xi_{el}}$ , con lo que  $\alpha_{i_{sub}} = \frac{1}{2} \alpha_{i_{el}}$ , disminuyendo por tanto el error cometido en la integra

ción, pudiendose conseguir que éste sea inferior a la Cte. En caso contrario sigue subdividiendose en subelementos considerando siempre  $\lambda_i = 6$  para cada uno de ellos, hasta que el error sea inferior a Cte ó hasta que se llega a un número máximo permitido de columnas (20 en el programa que nos ocupa).

Análogamente se realiza en la otra dirección obteniendose  $N_1$  y  $N_2$ . Naturalmente, el número máximo de subelementos,  $20 \times 20$ , solo se dará cuando  $\alpha_i$  sea muy grande, es decir  $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  sea muy alto (elementos muy grandes) ó R sea muy pequeño (punto desde el que se integra muy próximo al elemento).

A pesar de todo, este número se considera en general excesivo, por lo que se ha impuesto una limitación adicional de 100 subelementos por elemento, procediéndose a una reducción a un número menor que este, en el caso de que sea necesario un número superior, proporcional al número necesario en cada dirección.

Una vez calculados  $N_1$  y  $N_2$  en la forma indicada, se procede para cada uno de dichos subelementos al cálculo del número de puntos de integración que hay que introducir en él para que de nuevo el error de integración en ese subelemento particular sea inferior al requerido. En definitiva se pretende determinar  $\lambda_1(i,j)$  y  $\lambda_2(i,j)$  para cada subelemento  $i, j$ .

El procedimiento es análogo al anterior. Así, para cada subelemento se calcula la distancia mínima y el punto del subelemento que se encuentra a esa distancia mínima, lo que es muy fácil de realizar, pues ese punto será el más próximo al punto del elemento total cuya distancia sea mínima, o lo que es igual al punto del subelemento cuyas coordenadas intrínsecas se encuentren más próximas a las del punto anterior.

El cálculo de la distancia es inmediato por tanto, reduciéndose a la distancia entre dos puntos. Para el subelemento en el que se encuentre dicho punto de distancia mínima, lógicamente la distancia y el punto más próximo coincidirán con los calculados para el elemento global.

Una vez calculada dicha distancia se calcula  $\frac{\partial s}{\partial \xi_i}$  y  $\alpha_k$  con lo que procediendo de forma iterativa se puede calcular el mínimo número de puntos de integración en la dirección  $k$  que cumplen la condición de acotación del error.

Con ello queda definida totalmente la subdivisión de un elemento integrando desde un nodo que no pertenece a él.

#### III.2.3.4.- SUBDIVISION EN EL CASO DE QUE EL NODO PERTENEZCA AL ELEMENTO

Como se indicó en el apartado de generalidades, el hecho de que las funciones integrando de  $A_{ik_{bc}}^{\alpha}$ ,  $B_{ij_{bc}}^{\alpha}$  y  $P_{k_b}^{\alpha}$  dependan de  $\frac{1}{r}$  y  $-\frac{1}{r^2}$  para  $r \rightarrow 0$ , hace que las integrales sean singulares.

Si bien esta dificultad se salva matemáticamente mediante la consideración de la integral en el sentido de Cauchy (vease II.4), no por ello deja de existir un gradiente muy grande de la función subintegral en las proximidades de la singularidad, con los problemas de orden numérico que ello implica.

Para salvarlo, se trata de disponer de una gran cantidad de puntos de integración en las proximidades de la singularidad, para lo cual se divide el cuadrilátero inicial en dos triángulos formados por el nodo desde el que se integra y los lados opuestos (Fig. III.2.3.4.1).

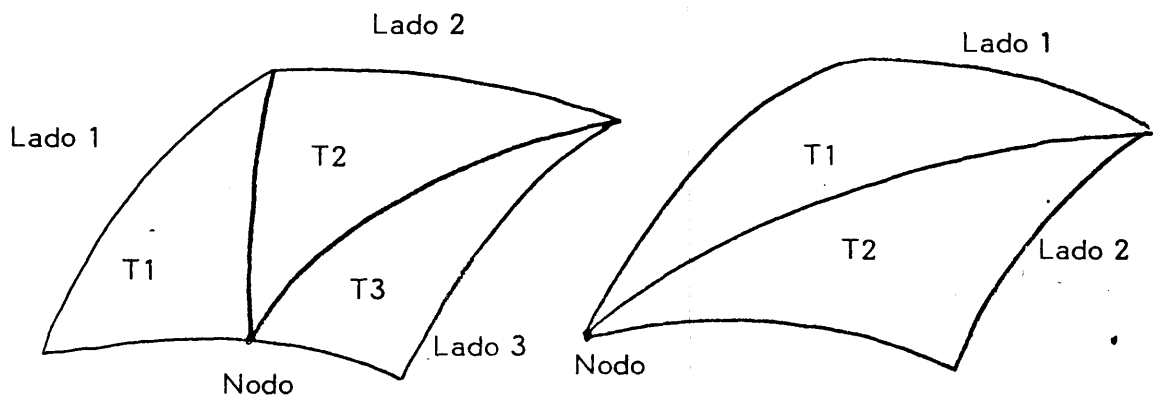


Fig. III.2.3.4.1

La subdivisión en cada uno de ellos, se realiza considerandolos como cuadriláteros degenerados, donde el lado degenerado corresponde precisamente al correspondiente al nodo desde el que se integra.

Naturalmente, al integrar sobre elementos triangulares habrá que realizar un cambio de coordenadas, de las "locales" del triángulo a las "globales" del cuadrilátero en la forma indicada por la Fig. III.2.3.4.2.

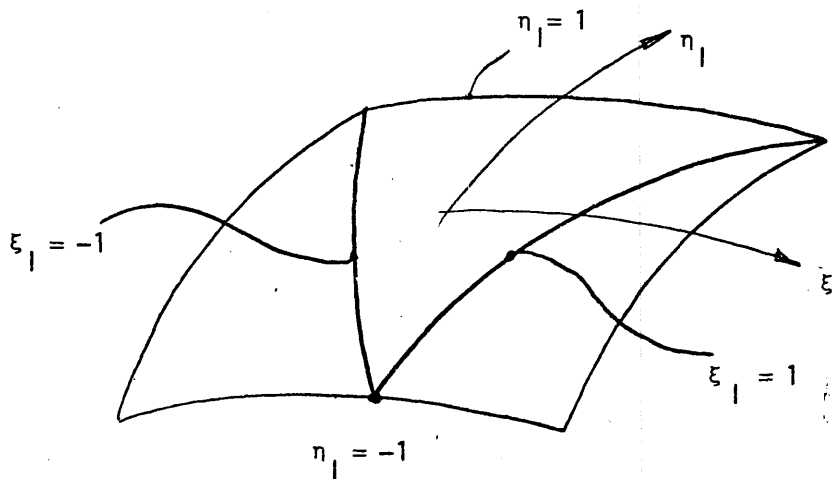


Fig. III.2.3.4.2

Este cambio de coordenadas es lineal, y tiene la forma

$$\xi_{ig}(\xi_l) = N^n(\xi_l) \xi_{ig}^n \quad \text{III.2.3.4.1}$$

donde  $\xi_{ig}(\xi_l)$  son las coordenadas "globales" de un punto del triángulo en función de las "locales",  $\xi_{ig}^n$  son las coordenadas globales de los nodos del triángulo y  $N^n$  es la matriz de funciones de forma lineales correspondientes al cuadrilátero, cuya expresión es

$$N^n = -\frac{1}{4} (1 + \xi_l^n \xi_l) (1 + \eta_l^n \eta_l) \quad \text{III.2.3.4.2}$$

y evidentemente  $\xi_{ig}^3 = \xi_{ig}^4$  correspondientes al lado degenerado.

Con ello, la colocación de puntos de integración de Gauss sobre el triángulo implica mediante III.2.3.4.1 la colocación en el cuadrilátero total.

El jacobiano de esta transformación se calcularía como

$$J_{\Delta \rightarrow \square} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_g}{\partial \xi_l} & \frac{\partial \xi_g}{\partial \eta_l} \\ \frac{\partial \eta_g}{\partial \xi_l} & \frac{\partial \eta_g}{\partial \eta_l} \end{vmatrix} \quad \text{III.2.3.4.3}$$

o lo que es igual

$$J_{\Delta \rightarrow \square} = \frac{\partial \xi_g}{\partial \xi_l} \frac{\partial \eta_g}{\partial \eta_l} - \frac{\partial \xi_g}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_g}{\partial \xi_l} \quad \text{III.2.3.4.4}$$

donde las derivadas pueden obtenerse de las expresiones III.2.3.4.1 y III.2.3.4.2 en la forma

$$\frac{\partial \xi_{gi}}{\partial \xi_{lj}} = \frac{\partial N^n}{\partial \xi_{lj}} \xi_{gi}^n \quad \text{III.2.3.4.5}$$

$$\frac{\partial N^n}{\partial \xi_{lj}} = -\frac{1}{4} \xi_{lj}^n (1 + \xi_{lk}^n \xi_{lk}^n)$$

Una vez efectuado el cambio de coordenadas, el proceso de subdivisión en cada uno de los triángulos es totalmente análogo al ya explicado para cuadriláteros salvo las particularidades.

(1).- La distancia mínima  $R$ , evidentemente, no puede ser la distancia nodo-elemento, que es nula, sino la distancia del nodo al lado opuesto del triángulo, calculándose ésta de una forma idéntica a como se indicó para el elemento, pero considerando ahora una sola dirección variable, pues una coordenada está fija.

(2).- Se sitúan el mismo número de puntos de integración en todos los subelementos de una misma columna Fig. III.2.3.4.3, , número que corresponde a la acotación del error en el punto del lado opuesto, correspondiente a la columna que se esté tratando y de distancia mínima al nodo desde el que se integra.

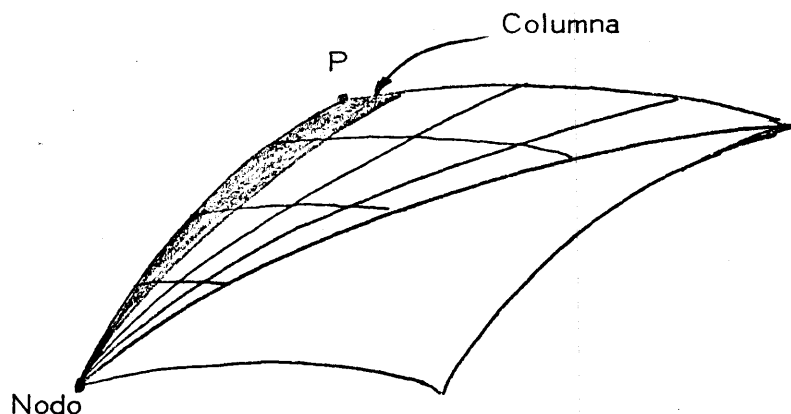


Fig. III.2.3.4.3

De acuerdo con ello, se consigue una distribución de puntos de integración tal como la indicada en la Fig. III.2.3.4.4 observándose la gran concentración de puntos de integración en las proximidades del nodo desde el que se integra, mejorándose ostensiblemente los resultados.



Un problema adicional que surge en este caso, y que no ocurre cuando el nodo no pertenece al elemento, se presenta cuando el elemento es un triángulo, es decir un cuadrilátero degenerado ya por sí.

En este caso, cuando se integra desde el nodo que pertenece al lado degenerado se realiza un proceso exactamente igual al anterior, salvo que ahora lógicamente solo existe un triángulo sobre el que integrar y no dos o tres, aunque con la diferencia respecto al caso ya aplicado de que para cubrir toda la superficie no puede hacerse  $\xi_{ig}^3 = \xi_{ig}^4$ , ya que realmente en el cuadrilátero degenerado el lado condensado representa dos nodos en globales Fig. III.2.3.4.5

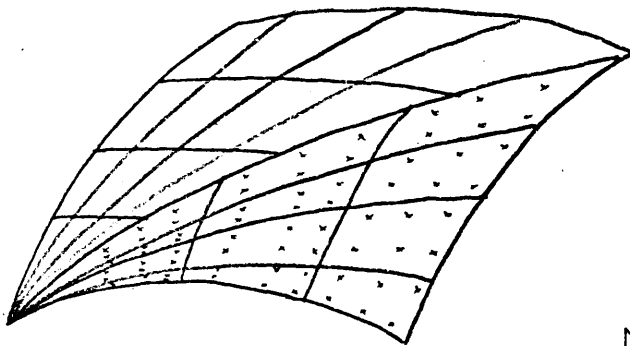


Fig. III.2.3.4.4

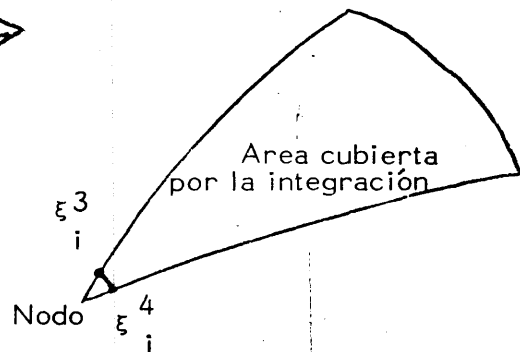


Fig. III.2.3.4.5

Con ello pues, estamos integrando realmente sobre un cuadrilátero y no sobre un triángulo, como en el caso anterior, es decir integramos sobre todo el elemento.

El problema surge cuando el nodo desde el que se integra no coincide con el lado degenerado, ya que en este caso no puede efectuarse una integración sobre todo el triángulo que realice una distribución de puntos de Gauss, tal como la indica -

da en Fig. III.2.3.4.4. Efectivamente, para conseguir una distribución de este tipo era necesario hacer  $\xi_i^3 = \xi_i^4$  coincidentes con el nodo desde el que se integraba. Si realizamos esto, los otros dos nodos del cuadrilátero tendrán por coordenadas, una las del nodo degenerado y otro las del otro nodo no degenerado, lo que supone no integrar sobre toda el área del triángulo (vease Fig. III.2.4.3.6).

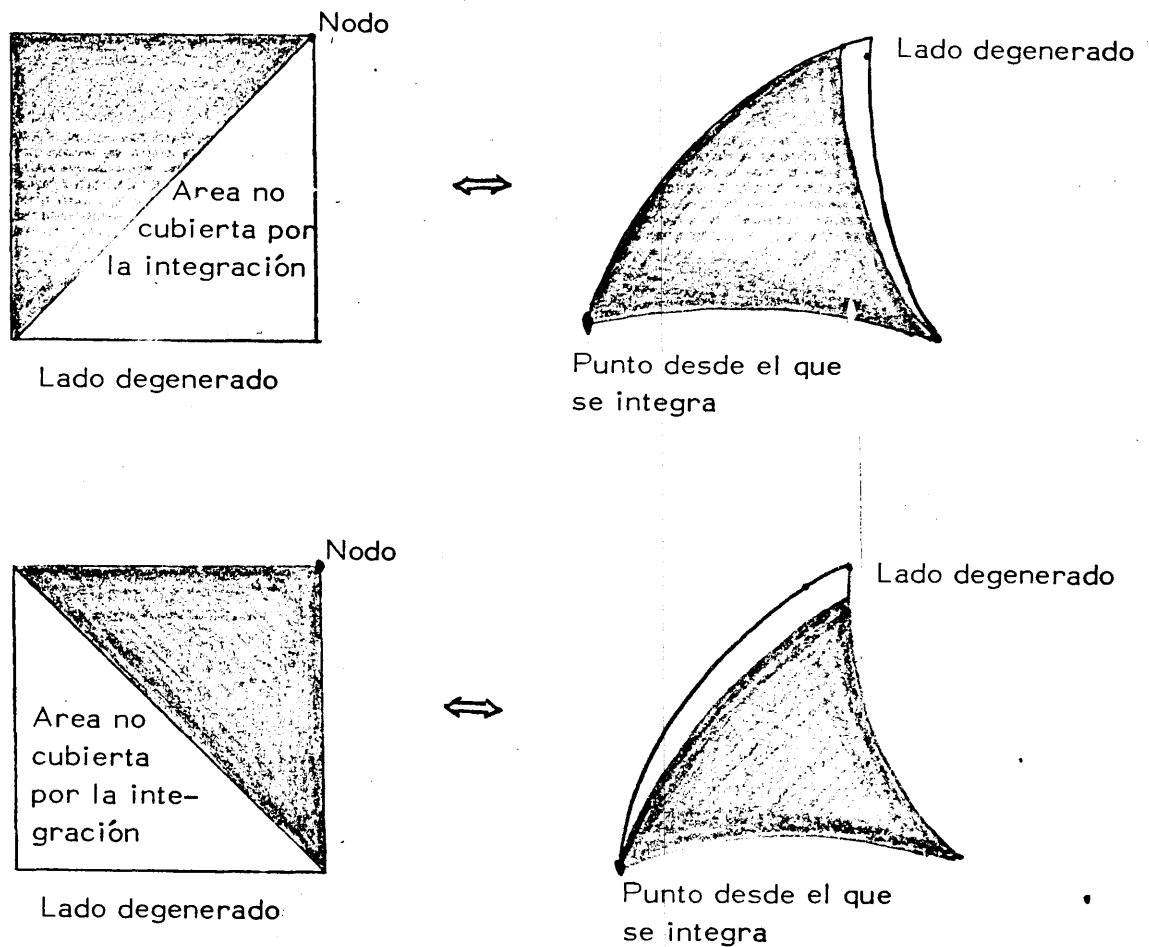


Fig. III.2.3.4.6

Para cubrir toda el área es necesario realizar una transformación de coordenadas, que corresponde a una combinación no lineal de las dos transformaciones anteriores definidas por la Fig. III.2.3.4.6.

Esta transformación viene definida por la expresión

$$\xi_{ig}(\xi_{il}) = \psi_i^k(\xi_{il}) f^k(\xi_{il}) \quad \text{III.2.3.4.5}$$

donde

$$f^1(\xi_{il}) = \frac{1}{2}(1 + g(\xi_{il}))$$

$$f^2(\xi_{il}) = \frac{1}{2}(1 - g(\xi_{il}))$$

III.2.3.4.6

$$g(\xi_{il}) = \frac{\xi_{2l} - \xi_{1l}}{2 - \xi_{1l} - \xi_{2l}}$$

$$\psi_i^k = \xi_{ig}^k(\xi_{il})$$

III.2.3.4.7

donde  $\xi_{ig}^k$  son las coordenadas globales definidas por las dos transformaciones de la Fig. III.2.3.4.6.

En definitiva pues, la  $\xi_{ig}$  viene dada por una transformación no lineal de dos transformaciones lineales. El jacobiano de esta transformación sería

$$\frac{\partial \xi_{ig}}{\partial \xi_{il}} = \psi_i^k(\xi_{il}) \frac{\partial f^k(\xi_{il})}{\partial \xi_{il}} + \frac{\partial \psi_i^k(\xi_{il})}{\partial \xi_{il}} f^k(\xi_{il}) \quad \text{III.2.3.4.8}$$

donde

$$\frac{\partial f^1}{\partial \xi_1} = \frac{\xi_2 - 1}{(2 - \xi_1 - \xi_2)^2}$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial \xi_2} = \frac{1 - \xi_1}{(2 - \xi_1 - \xi_2)^2}$$

III.2.3.4.9

$$\frac{\partial f^2}{\partial \xi_1} = - \frac{\partial f^1}{\partial \xi_1}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial \xi_2} = - \frac{\partial f^1}{\partial \xi_2}$$

En definitiva pues, una vez realizada la subdivisión sobre cada uno de las dos zonas de las figuras Fig. III.2.3.4.6, de acuerdo con la cuadratura de Gauss= definida por el error de integración prefijado, se realiza el cambio de coordenadas anterior, con lo cual se realiza la integración completa.

### III.2.4.- CALCULO DE LAS FUNCIONES SUBINTEGRALES CORRESPONDIENTES

$$\underline{A_{ik}^{\alpha} B_{ik}^{\alpha} Y P_k^{\alpha} \text{ EN LOS PUNTOS DE INTEGRACION}}$$

El último paso una vez definidas las características  $N_1, N_2$  y  $\lambda_1(i,j), \lambda_2(i,j)$  de la cuadratura de Gauss definida, es el cálculo de la función  $F(\xi, \eta)$  para cada punto de integración. Esta función varía para cada una de las matrices  $a$  a calcular.

(1).- Constantes  $A_{ik}^{\alpha}$

La función subintegral  $F$  en este caso es

$$F = U_{ik}(\alpha, d^{(r)}(b, c)) N^c J \quad \text{III.2.4.1}$$

con  $U_{ik}$  definido en II.2.1,  $N^c$  en III.1.1.2 y III.1.1.4 y  $J$  es el jacobiano de la transformación calculado en III.2.3.2.2.

(2).- Constantes  $B_{ik}^{\alpha}$

Ahora,

$$F = T_{ik}(\alpha, d^{(r)}(b, c)) N^c J \quad \text{III.2.4.2}$$

donde  $T_{ik}$  viene dado por II.4.5 y  $N^c$  y  $J$  son las anteriores.

Es conveniente en este momento hablar del cálculo de los términos de la ma -

triz B que pertenecen a las tres ecuaciones integrales de un nodo y que multiplican - a los movimientos correspondientes a ese nodo, o lo que es igual las constantes correspondientes a un caso singular.

Estas constantes, y según la expresión de Somigliana se calculan sumandole a la integral III.2.4.2 correspondiente a los valores  $C_{ik}$  definidos en II.4.10, valores que en el caso parabólico y para cualquier tipo de situación del nodo es complicado calcular. Esta dificultad se salva introduciendo el concepto de movimiento como sólido rígido, que se definió en III.1.3 y que permite calcular estos términos como suma de términos correspondientes a la misma incógnita y a la misma ecuación integral de la matriz B.

(3).- Vector  $P_{kb}^a$

Por último existen en el programa dos aportaciones claramente definidas de fuerzas de volumen que corresponden a fuerzas de peso propio y fuerzas de pretensado.

Las expresiones y el cálculo de la expresión subintegral de cada una vienen dadas en III.1.3.6 por lo que no es necesario insistir más sobre ello.

Con ello, queda definido el cálculo de las constantes en el contorno pretendido

### III.3.- FORMACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Una vez introducidas las condiciones de compatibilidad y de equilibrio en los nodos de interfase, el sistema definido en III.1.3.9, éste queda reducido a un problema con  $\sum_{r=1}^R p(r) \times 3$  ecuaciones, donde  $R$  era el número total de subregiones, y  $p(r)$  el número total de nudos de cada subregión  $r$ , y por último el 3 aparece como consecuencia de las tres posibles ecuaciones integrales, para las tres direcciones coordenadas, que se pueden establecer para cada nodo.

El número de incógnitas es mayor en principio y vamos a tratar de determinarlo en principio. Sea  $I$  el número total de interfases entre subregiones, cada una con  $p(i)$  nudos, y  $C$  el número de trozos de subregión que pertenecen al contorno exterior del dominio, y que evidentemente coincide con el número  $R$  de subregiones (vease Fig. III.3.1)

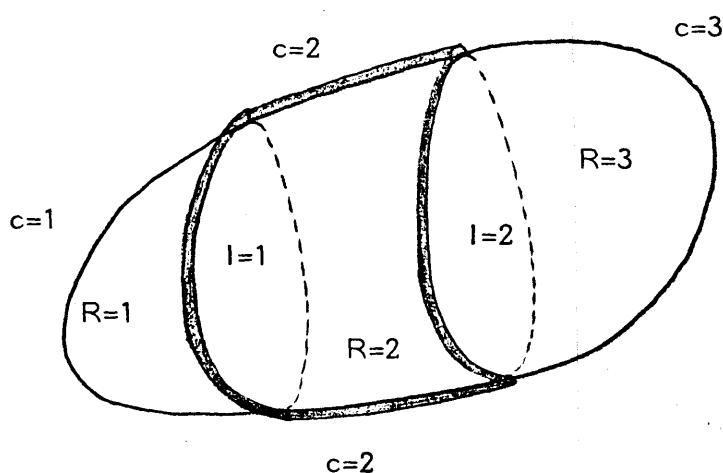


Fig. III.3.1

El número de incógnitas de cada nodo será de 6 para los nodos de interfase (movimientos y tensiones) y tres para los nodos de contorno, supuesto como siempre que conocemos 3 condiciones de contorno, y que el contorno tiene una sola normal (en casos más complicados es necesario el realizar un cuidadoso tratamiento de las condiciones de contorno (vease III.4) para llegar a dicha situación).

En definitiva el número total de incógnitas será de

$$\sum_{i=1}^I 6 p(i) + \sum_{c=1}^C 3 p(c),$$

que como se verá en la mayoría de los casos es mayor que el número de ecuaciones.

El primer problema para resolver el sistema será conseguir el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, para lo cual será necesario el realizar un estudio de los distintos tipos de nudos que se pueden presentar en un problema, fijando el número de ecuaciones y el número de incógnitas que aparecen en cada uno de ellos, para a continuación proceder a una cierta condensación del exceso de incógnitas que aparecen en algunos de ellos. La tipología de los nudos se trata en III.3.1 y el proceso de condensación en III.3.2.

El segundo problema que se plantea consiste en conseguir que la estructura de la matriz de coeficientes del sistema a resolver sea la más apropiada, tanto para el proceso de formación de la propia matriz, como para la posterior resolución del sistema de ecuaciones.

La estructura que se ha adoptado es la que ofrece mayores ventajas en el conjunto de factores a considerar como son, el sistema de almacenamiento de la matriz, la cantidad de almacenamiento ahorrado por zonas agrupadas de términos nu-

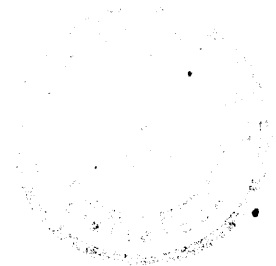


los y método de resolución utilizado. Básicamente puede decirse que los objetivos a conseguir son:

(a).- Ordenación de filas y columnas de la matriz que permitan un montaje - sistemático, definiendo tantas incógnitas como ecuaciones.

(b).- Agrupación de los términos nulos en forma conocida "a priori", es decir antes del almacenamiento, que permita su eliminación en las previsiones de almacenamiento de la matriz.

(c).- Estructura final de la matriz adecuada al Método del Gradiente Conjugado, elegido para resolución.



### III.3.1.- TIPOLOGIA DE LOS NODOS

Por cada nodo pueden plantearse tantas ecuaciones como número de subregiones a las que pertenece multiplicada por tres, pero el número de incógnitas a él asociadas depende de la geometría y del número de interfases a las que pertenece. La clasificación que se realiza es la siguiente.

#### - Nodo tipo A -

Corresponde a un nodo del contorno exterior que pertenece exclusivamente a una subregión (Fig III.3.1.1).

El número de ecuaciones que en él se pueden plantear es de 3, igual al número de incógnitas (movimientos y tensiones en el contorno) supuestas dadas tres = condiciones de contorno. No es necesario pues proceder a condensación de incógnitas.

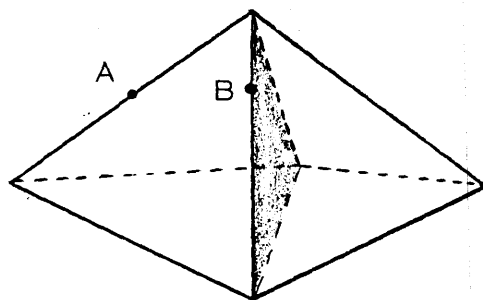


Fig. III.3.1.1

- Nodo tipo B -

Pertenece al contorno exterior, y se encuentra en dos subregiones (Fig. III.3.1.1)

El número de ecuaciones definidas es de 6, y el de incógnitas también de seis (movimientos ó tensiones en el contorno más tensiones en la interfase). No es necesaria la condensación.

- Nodo tipo C1 -

Pertenece al contorno exterior y a más de dos subregiones, cumpliéndose además que el número de interfases (N I) a las que pertenece es igual al número de subregiones menos uno. (Fig. III.3.1.2).

El número de ecuaciones es de  $3 \times NS$  (número de subregiones) y el número de incógnitas de  $3 + 3 NI = 3 + 3 (NS - 1) = 3 \times NS$  (movimientos ó tensiones en el contorno más tensiones en las interfases). No es necesaria la condensación.

La diferenciación entre nodos B y C1 viene condicionada por el proceso de montaje.

- Nodo tipo C2 -

Pertenece al contorno exterior y a más de dos subregiones, cumpliéndose además que el número de interfases a las que pertenece es igual al número de subregiones. (Fig. III.3.1.3).

El número de ecuaciones es como siempre  $3 \times NS$ , mientras que el número de incógnitas es de  $3 + 3 NI = 3 + NS$ .

En este caso existen tres incógnitas más que ecuaciones, por lo que si se desea mantener la proporción para no introducir incógnitas adicionales, será necesario eliminar las sobrantes, mediante el proceso de condensación que se expone en III.3.2.

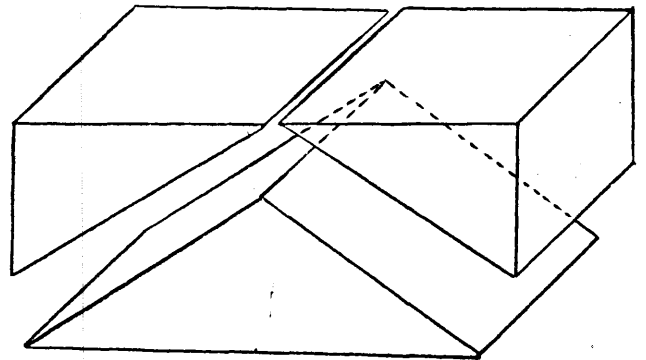
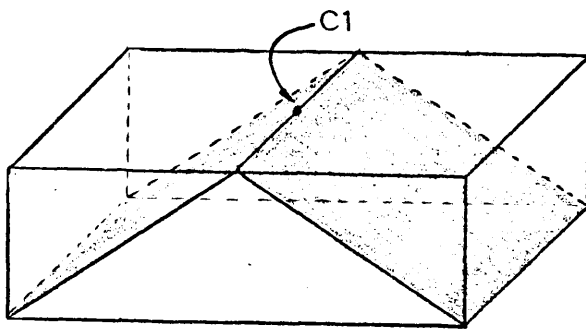


Fig. III.3.1.2

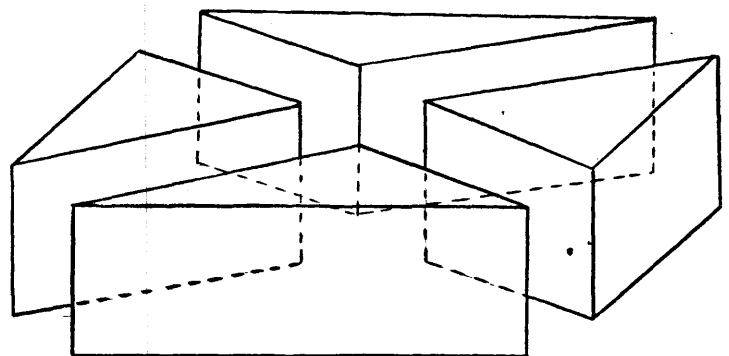
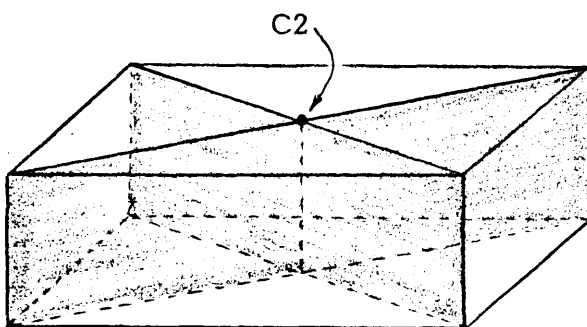


Fig. III.3.1.3

- Nodo tipo C3 -

Pertenece al contorno exterior, cumpliéndose que el número de interfases es mayor que el número de subregiones a las que pertenece en un porcentaje no limitado. Al igual que en el caso anterior existen más incógnitas que ecuaciones, por lo que - será necesario realizar la condensación (Fig. III.3.1.4).

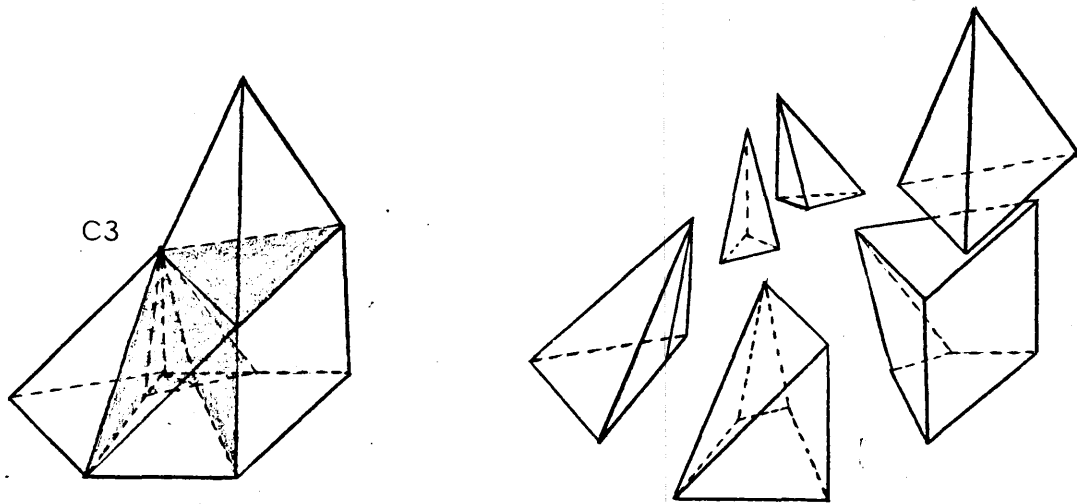


Fig. III.3.1.4

- Nodo tipo D -

No pertenece al contorno exterior, sino que se encuentra en dos subregiones y una interfase (Fig. III.3.1.5).

El número de ecuaciones es de seis, igual al de incógnitas (movimientos y - tensiones en la interfase).

- Nodo tipo E -

No pertenece al contorno exterior, y pertenece a tantas interfases como subregiones (Fig. III.3.1.5).

Existen  $3 \times NS$  ecuaciones y  $3 + 3 NS$  incógnitas, siendo necesaria la condensación.

- Nodo tipo F -

No pertenece al contorno exterior, encontrándose en un número mayor de interfases que de subregiones (Fig. III.3.1.5).

También es necesaria la condensación de las tensiones sobrantes.

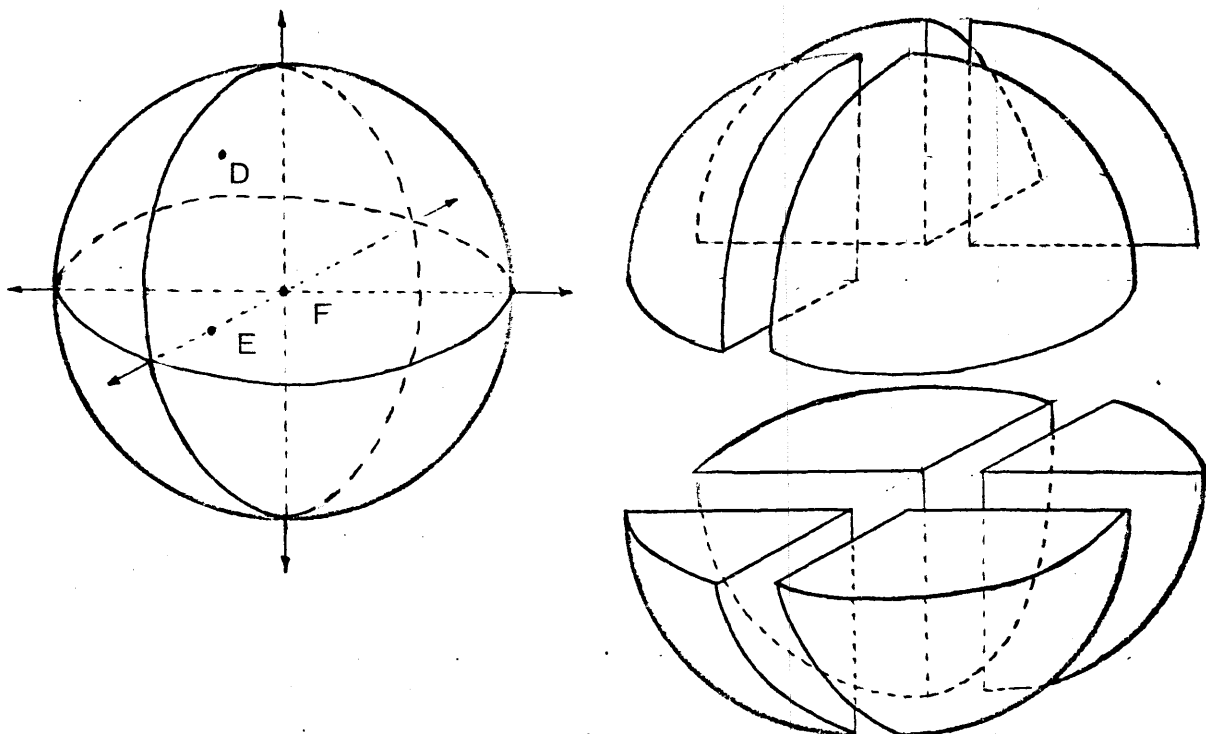


Fig. III.3.1.5

### III.3.2.- CONDENSACION DE TENSIONES DE INTERFASE

La primera cuestión en el proceso, ya apuntado, de eliminación de incógnitas, consiste precisamente en la elección de estas incógnitas.

Para el caso de solo tres incógnitas a eliminar se escogen las tensiones de interfase entre la primera y últimas subregiones conectadas por el nodo en cuestión. Naturalmente suponemos que esta interfase existe, lo que implica el que la numeración de estas subregiones no puede ser arbitraria, sino que tiene que ser de tal forma que exista dicha interfase. Así las numeraciones que hay en las Fig. III.3.2.1 (a) y III.3.2.1 (b) son válidas, mientras que no lo es la de la Fig. III.3.2.1 (c).

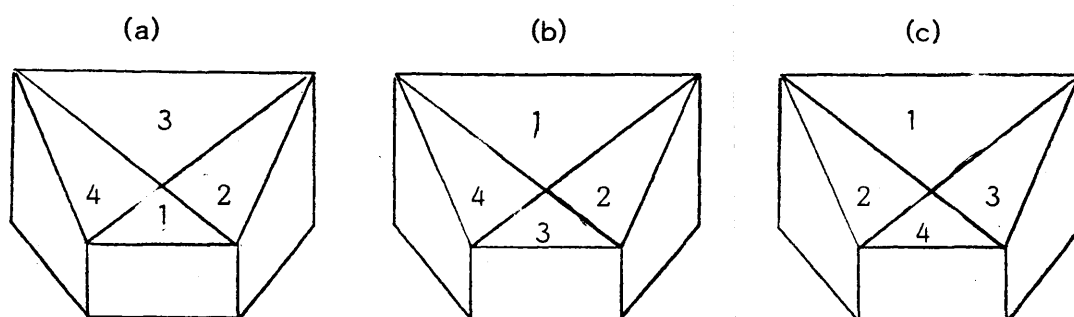


Fig. III.3.2.1

Para nodos en los que se necesite la condensación de más de una interfase se eliminarán precisamente las tensiones correspondientes a las últimas interfases, es decir  $1, n$ ;  $n, n-1$ ;  $n-1, n-2$ , etc, siendo  $n$  el número de subregiones conectadas.

La misma consideración hecha anteriormente en cuanto a numeración, es ne

cesario hacer ahora, también deduciéndose en definitiva, que es necesario seguir una numeración cíclica en los nudos a condensar.

Una vez elegidas las incógnitas a condensar, el problema que se plantea es el procedimiento a seguir para eliminarlas.

El método seguido consiste en expresar estas incógnitas en función de otras que no vayan a ser eliminadas, y que por tanto sí aparecen en la formulación final. Para ello, es preciso elegir estas incógnitas sobre las que vamos a trabajar, y definir la relación que existe entre las variables a condensar y las no condensadas. En cualquier caso, es preciso establecer una hipótesis que distorsione lo menos posible el proceso general y que por otra parte sea sencilla de aplicar prácticamente.

Existen en principio una gran cantidad de posibilidades para definir dicha hipótesis. La primera posible se refiere a la consideración de las tensiones principales en ese nodo como variable del problema y expresar las incógnitas a condensar en función de ellas. Para el resto de incógnitas en tensiones asociadas a ese nodo pueden mantenerse las propias que ya existían previamente, si bien también sería posible definir las lógicamente en función de las tensiones principales. Estas variables podrían por ejemplo ir asociadas a las incógnitas de tensión de la primera interfase, que previamente se habría dispuesto en función de ellas.

Existen dos inconvenientes fundamentales para el empleo de este método. El primero es que implícitamente se considera que el tensor de tensiones es idéntico para todas las subregiones que inciden en ese punto, lo que evidentemente no es, cierto para subregiones con propiedades diferentes. La segunda es aún más decisiva, ya que no se conocen las direcciones principales, ni presumiblemente, una for-



ma fácil de hallarlas lo que impide el disponer el vector tensión en  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  en una interfase en función de las tensiones principales. Este segundo inconveniente determinó el abandono del método.

Otra posibilidad se refiere a la utilización de la relación de Cauchy (III.4) para eliminar las tensiones a condensar, en función de las interfases distintas no a condensar. Aunque esto es posible en la mayoría de los casos, existen otros en los que no puede aplicarse, como por ejemplo cuando solo existen dos interfases no a condensar. Al mismo tiempo sigue suponiéndose la continuidad del tensor tensión entre subregiones.

La falta de generalidad aducida, y también, de forma importante, la dificultad que supone su implementación práctica en el montaje de la matriz aconsejó desecharla. Efectivamente, con este método aparecen términos en las columnas de tensiones, del nodo a condensar no solo cuando se integra en subregiones que forman una interfase, sino que aparecen también cuando se integra en subregiones que sin formar una interfase coinciden en el nodo, lo que naturalmente dificulta el proceso.

La última posibilidad desechada, y quizás la más exacta y general, se refiere a la elección como incógnitas, adscritas a las dos primeras interfases que inciden en un nudo, de las componentes del tensor tensión, por ejemplo  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  para la primera interfase y  $(\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  para la segunda. Naturalmente el resto de las interfases que no se condensan conservan sus propias incógnitas, mientras que en la primera y segunda interfases, así como en aquellas a condensar se expresa el vector tensión en función de las incógnitas anteriores. Existe por tanto una cierta redundancia, ya que el resto de vectores tensión también podrían haberse dispuesto en función de dichas incógnitas, sin embargo, dicha redundancia podría servir incluso de comprobación.

La razón por la que se abandonó la idea anterior, independientemente del hecho de considerar de nuevo la continuidad en el tensor de tensión, fue la misma que en el caso anterior, es decir la introducción de graves problemas en el proceso de montaje.

El procedimiento elegido consiste en relacionar las tensiones incógnitas a condensar con las tensiones del resto de los nodos del elemento considerado. La dificultad estriba en la selección de los nodos en los que apoyaremos esta extrapolación, dado que en un mismo elemento pueden existir más de un nodo al que haya que aplicar la condensación.

En el caso más general de que sólo uno de los nodos del elemento sea a condensar, lo que hacemos será elegir una función de aproximación de tensiones en el elemento, de un grado menor a la inicial,  $t_i = N_i^n t_i^n$ , de forma que cumpla que para todos los nodos de tensiones conocidas, éstas coinciden con las predichas por la interpolación.

Extrapolando ésta función de aproximación al nodo desconocido, puede obtenerse la tensión de este nodo en función de las tensiones en el resto de los nudos.

(Fig. III.3.2.2)

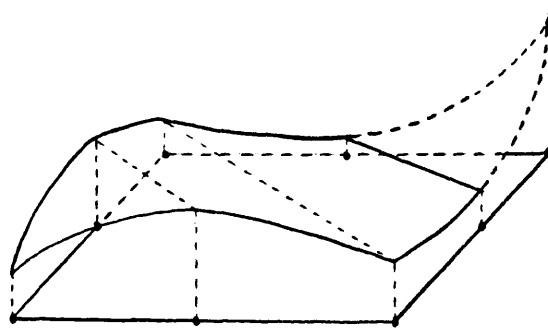


Fig. III.3.2.2

En particular para un cuadrilátero escogemos una función de interpolación - de tensiones en función de las coordenadas intrínsecas en la forma

$$t_i = a_{0_i} + a_{1_i} \xi + a_{2_i} \eta + a_{3_i} \xi^2 + a_{4_i} \eta^2 + a_{5_i} \xi \eta^2 + a_{6_i} \eta \xi^2 \quad \text{III.3.2.1}$$

donde se ha eliminado el término en  $\xi \eta$  correspondiente a la formulación original para salvaguardar la simetría.

Particularizando  $(\xi, \eta)$  para los siete nodos conocidos se pueden obtener - los valores de  $a_{0_i}, \dots, a_{6_i}$  en función de  $t_i^1, \dots, t_i^7$ , con lo cual introduciendo - en III.3.2.1 las coordenadas intrínsecas del nodo a condensar se puede calcular - la tensión  $t_i$  de éste en función de  $t_i^1, \dots, t_i^7$ . Para el nodo 1 por ejemplo se obtiene

$$t_i^1 = t_i^2 + t_i^4 - t_i^3 \quad \text{III.3.2.2}$$

que observando atentamente corresponde a la extrapolación lineal de estos valores - tal como indica la Fig. III.3.2.3.

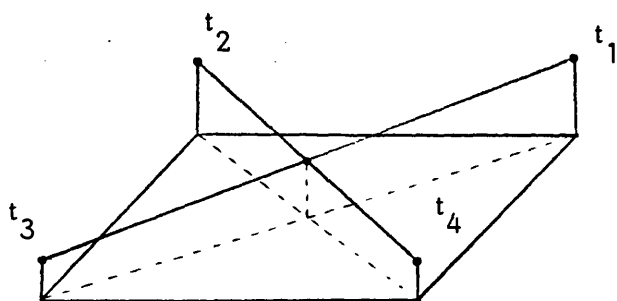


Fig. III.3.2.3

$$\begin{aligned} t_i^1 &= t_i^2 + 2 \left( \frac{t_i^2 + t_i^4}{2} - t_i^3 \right) = \\ &= t_i^2 + t_i^4 - t_i^3 \end{aligned}$$

El problema sin embargo, aumenta cuando alguno de los nudos 2, 3, ó 4 sea también a condensar, lo que por otra parte es bastante probable.

En general la posibilidad de que los nudos 2 y 4 sean a condensar es bastante alta, ya que las líneas 162 y 154 es posible que sean líneas de separación entre interfases (compuestas por nodos E y F). Para evitar este problema, y siempre con el ejemplo del nodo 1, se eligen como nodos de interpolación los nodos 7, 3, 8 cuya probabilidad de condensación es mucho menor.

Observando la Fig. III.3.2.4 (a) se deduce que la expresión a aplicar es

$$t_i^1 = 2(t_i^7 + t_i^8) - 3t_i^3 \quad \text{III.3.2.3}$$

Naturalmente realizando las permutaciones pertinentes se puede conseguir los valores de las tensiones en todos los vértices del cuadrilátero. Para un nodo intermedio, por ejemplo el 6 se realiza una interpolación parecida (Fig. III.3.2.4 (b)) definida por la siguiente expresión.

$$t_i^6 = t_i^5 + t_i^7 - t_i^8 \quad \text{III.3.2.4}$$

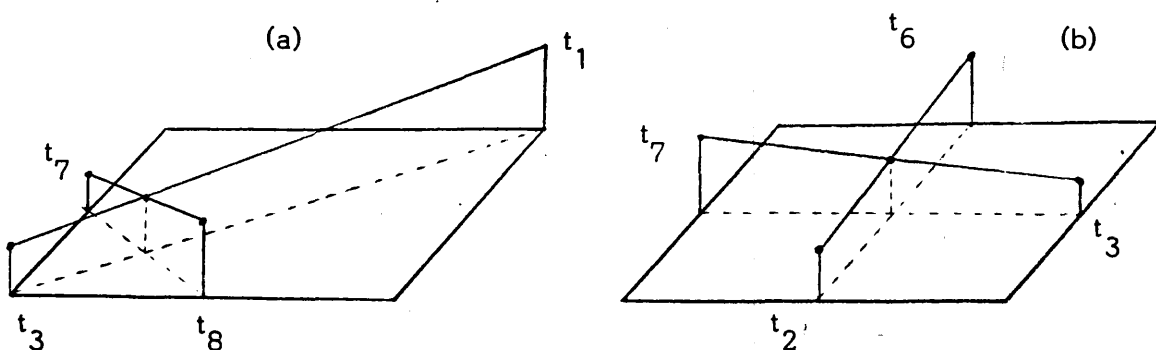


Fig. III.3.2.4

Naturalmente en todas las expresiones es necesario hacer la salvedad antes apuntada de la posibilidad de que alguno de los nodos que intervienen en la expresión anterior sea también nodo a condensar.

Para nodos de vértice solo se considera el caso de que uno solo de los nodos soporte sea no a condensar. Esta consideración es razonable porque los nodos a condensar se agrupan en líneas de separación entre interfases, por lo que si el nodo 7 por ejemplo en el caso del nodo 1 es a condensar lo esperable es que también lo sea el nodo 3. La aproximación seguida en este caso (Fig. III.3.2.5) es la más simple, es decir

$$t_i^1 = t_i^8$$

III.3.2.5

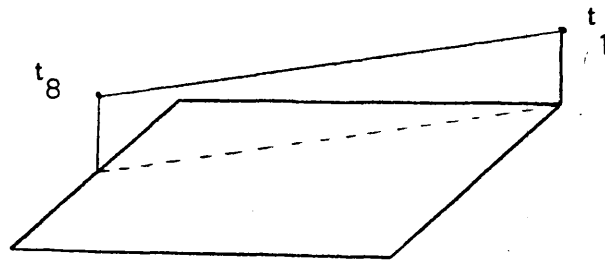


Fig. III.3.2.5

Para nodos intermedios es posible que exista uno solo de los tres nodos soporte a condensar (Fig. III.3.2.6). La hipótesis que se realiza en este caso es que en la línea media en coordenadas intrínsecas del elemento paralela al lado donde se encuentra el nodo a condensar (nodo 6), la tensión es constante, consiguiendo la expresión

$$t_i^6 = 2 t_i^5 - t_i^8$$

III.3.2.6

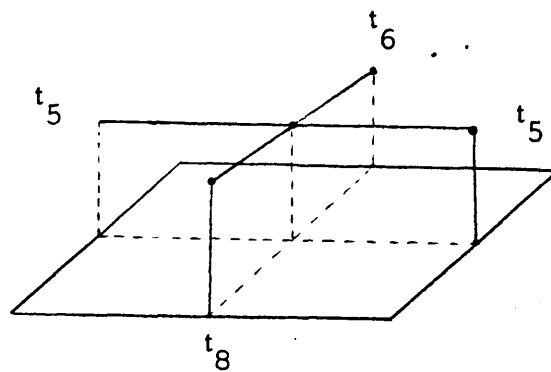


Fig. III.3.2.6

Para nodos intermedios en los que solo exista un sólo nodo soporte sin condensación, se sigue también la aproximación constante definida en III.3.2.5.

En definitiva, dependiendo del caso particular, resolveremos la extrapolación de acuerdo con los casos anteriores, que engloban todas las posibilidades, salvo el caso muy específico de que todos los nodos del elemento sean a condensar, que correspondería a la discretización de toda una interfase por un solo elemento, lo que evidentemente se soslaya por simple discretización de una interfase en al menos dos elementos.

El proceso de montaje es ya inmediato, puesto que, conocidos, por la integración previa los factores que afectan a cada una de las variables, así como su condición de incógnita o dato, podemos adicionar tales aportaciones, bien a la matriz de coeficientes, bien al vector de términos independientes, según se indica en el apartado siguiente.

### III.3.3.- ORDENACION DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES DEL SISTEMA

La ordenación de la matriz supone la definición de la situación de las filas (orden de integración de los nodos) y por otro la situación de las columnas (orden de las incógnitas).

En lo que se refiere a la primera ordenación no existe dificultad, siguiendo-se una ordenación por subregiones, y dentro de cada una de ellas por interfases de menor a mayor, considerando a estos efectos, que la interfase  $n - n$ , siendo  $n$  la subregión considerada, corresponde a los nodos que solo pertenecen a dicha subregión. Todo ello implica que no estarán juntas todas las ecuaciones integrales asociadas a un nodo, sino agrupadas de tres en tres y situadas en cada una de las correspondientes subregiones a las que pertenece dicho nodo.

La situación de las columnas, que están asociadas evidentemente a la ordenación de las incógnitas, es mucho más arbitraria, y la elección se realizó basandose en dos objetivos (Lachat y Watson). El primero de ellos se refiere a la consecución de una matriz tendiendo a matriz en banda, y el segundo a tratar de conseguir que la diagonal principal de la matriz siempre esté llena y preferiblemente con valores superiores a los del resto de la fila, lo que mejora las características del sistema a la hora de la resolución.

Ambos objetivos se consiguen disponiendo las incógnitas, siguiendo un paralelismo total con la ordenación usada para las filas. Es decir agrupamos las incógnitas por subregiones y dentro de ellas por interfases, de tal forma que las incógnitas de tensiones de interfase aparezcan siempre en las columnas correspondientes a interfases  $n, i \text{ } i > n$ , siendo  $n$  la subregión considerada, y análogamente los movimientos (en caso de nodos intrínsecos) ó incógnitas de contorno, se situarán en las

columnas  $n$   $j$   $j < n$ .

Como ejemplo práctico podemos tomar el de la Fig. III.3.3.1 en el que se indican la situación de filas y columnas para la discretización indicada, con la nomenclatura:

$u_{n,j}$  movimientos de nodos de la interfase  $n$ ,  $j$   $n > j$ .

$u_{n,n}$  movimientos o tensiones incógnitas del contorno de la subregión  $n$ .

$t_{n,j}$  tensiones en los nodos de la interfase  $n$ ,  $j$   $j > n$ .

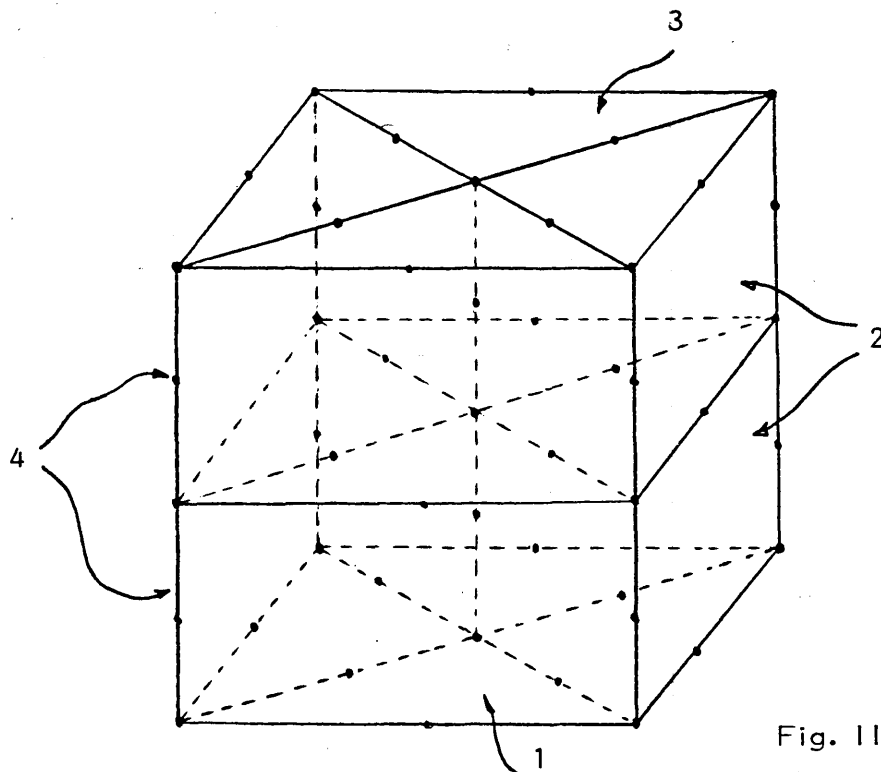


Fig. III.3.3.1



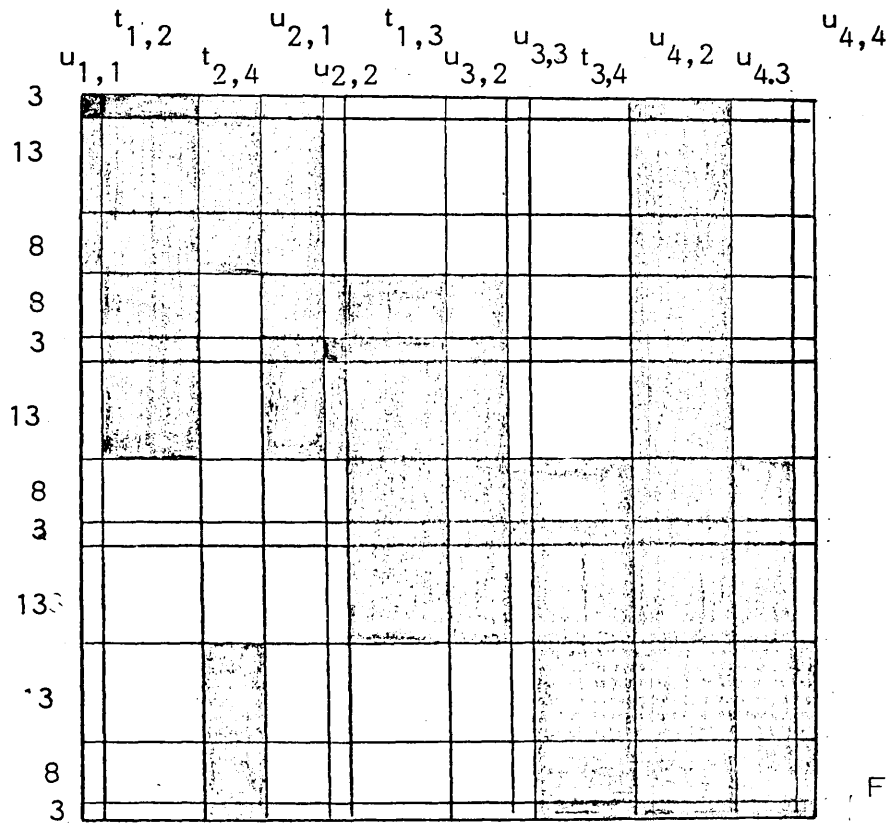


Fig. III.3.3.2

Podemos ahora ver la situación de las incógnitas y ecuaciones integrales para cada uno de los tipos de nodos considerados en III.3.1.

- Nodo tipo A (Fig. III.3.1.1) -

Pertenece a la subregión  $i$ .

3 incógnitas de contorno en la interfase  $i - i$ .

- Nodo tipo B (Fig. III.3.1.1) -

Pertenece a las subregiones  $i, j$  ( $i < j$ )

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $i, j$  en  $i - j$

3 incógnitas de contorno en  $j - i$ .

- Nodo tipo C1 (Fig. III.3.1.2) -

Pertenece a las subregiones  $i, j, k$  ( $i < j < k$ ).

3 incógnitas de tensiones de interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $j, k$  en  $j - k$ .

3 incógnitas de contorno en  $k - i$ .

- Nodo tipo C2 (Fig III.3.1.3).-

Pertenece a  $i, j, k, l$  ( $i < j < k < l$ ).

3 incógnitas de tensiones de interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $j, k$  en  $j - k$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $k, l$  en  $k - l$ .

Se condensan las tensiones de la interfase  $i, k$ .

3 incógnitas de contorno en  $l - i$ .

- Nodo tipo C3 (Fig. III.3.1,4) -

Pertenece a  $i, j, k, l, m, n$  ( $i < j < k < l < m < n$ )

3 incógnitas de tensiones de interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $j, k$  en  $j - k$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $k, l$  en  $k - l$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $l, m$  en  $l - m$ .

3 incógnitas de tensiones de interfase  $m, n$  en  $m - n$ .

Se condensan las tensiones correspondientes a las interfases  $i, k; j, m$ .

- Nodo tipo D (Fig. III.3.1.5) -

Pertenece a  $i, j$  ( $i < j$ ).

3 incógnitas de tensiones de interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de movimientos en  $j - i$ .

- Nodo tipo E (Fig. III.3.1.5) -

Pertenece a las subregiones  $i, j, k, l$  ( $i < j < k < l$ ).

3 incógnitas de tensores de la interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $j, k$  en  $j - k$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $k, l$  en  $k - l$ .

Se condensan las tensiones correspondientes a la interfase  $l, i$ .

3 incógnitas de movimientos en  $l - i$ .

- Nodo tipo F (Fig. III.3.1.5) -

Pertenece a las subregiones  $i, j, k, l, m, n, o, p$  ( $i < j < k < l < m < n < o < p$ )

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $i, j$  en  $i - j$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $j, k$  en  $j - k$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $k, l$  en  $k - l$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $l, m$  en  $l - m$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $m, n$  en  $m - n$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $n, o$  en  $n - o$ .

3 incógnitas de tensiones de la interfase  $o, p$  en  $o - p$ .

Se condensan las tensiones correspondientes a las interfaces  $j, o; k, n;$

$l, i; m, p; i, p$ .

3 incógnitas de movimientos en  $p - i$ .

#### III.4.- APLICACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

La imposición de las condiciones de contorno, es otro de los apartados importantes en el proceso a seguir en la resolución de un problema mediante cualquier método.

En nuestro caso es absolutamente necesario también, en orden a conseguir dos objetos, el primero, evidentemente, el evitar la singularidad de la matriz de coeficientes, y el segundo el conseguir el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Esta necesidad ya se comentó en el epígrafe anterior, en lo referente a la posibilidad de aparición de un mayor número de ecuaciones que de incógnitas en un nudo en el que intersectaban varias subregiones, siendo necesaria la condensación de algunas de estas incógnitas, mediante la introducción de una hipótesis complementaria.

En el caso de incógnitas del contorno, vuelve a aparecer es problema, solventándose mediante la adecuada imposición de las condiciones de contorno, e introduciendo, en los casos que sea necesario, las aproximaciones ó relaciones precisas para evitar un número mayor de incógnitas, que de ecuaciones. Planteado el problema, podemos pasar a explicar como se ha resuelto.

Sobre el contorno exterior del dominio en estudio pueden producirse tres situaciones diferentes, en cuanto a condiciones de contorno se refiere.

(1).- Se conoce el movimiento (los tres componentes) sobre el contorno.

En Fig. III.4.1

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \partial D_1$$

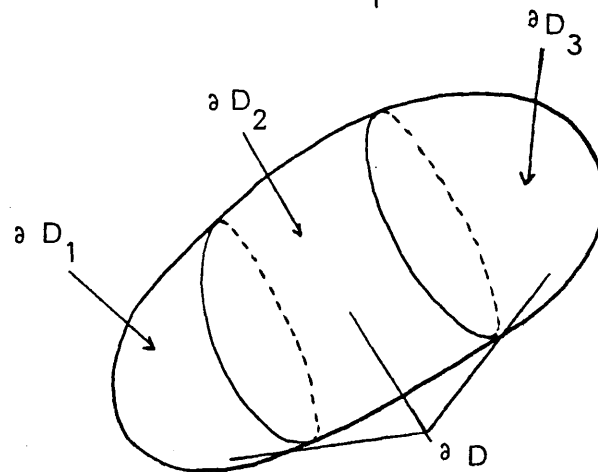


Fig. III.4.1

(2).- Se conoce la tensión (los tres componentes sobre el contorno).

En fig. III.4.1

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{en } \partial D_2$$

(3).- Se conoce parte de los componentes de movimiento y el resto en tensión.

En Fig. III.4.1

$$t_i = \bar{t}_i \quad u_j = \bar{u}_j \quad \text{en } \partial D_3 \quad \text{con } i \neq j.$$

Evidentemente se ha de cumplir que

$$\partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3 = \partial D \quad (\text{contorno total})$$

pudiendo producirse que alguno de los  $\sigma D_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) no exista. Es preciso hacer notar que uno de estos casos particulares ( $\sigma D_k = 0$   $k = 1$   $k = 3$ ) presenta algunos problemas. Este caso de condiciones de contorno en tensión equivalente al problema de Neumann en la Teoría del Potencial, presenta infinitas soluciones pues se incorpora la posibilidad de movimiento como sólido rígido. Para eliminarla caben dos soluciones desde el punto de vista operativo. La primera consiste en sustituir las condiciones en tensión por condiciones en movimiento que no "alteren" la configuración deformada del dominio y que impidan los movimientos como sólido rígido. La segunda consistiría en dar las condiciones de contorno en tensiones y una vez obtenido el sistema de ecuaciones y antes de proceder a resolverlo, se anulan los movimientos de ciertos puntos que al igual que antes no alteran la configuración deformada e impiden los movimientos como sólido rígido. Para aclarar estas ideas, nos referimos al caso sencillo de la Fig III.4.2, que representa un cubo sometido a tracción en las caras 3) y 4) y libre de tensiones en el resto.

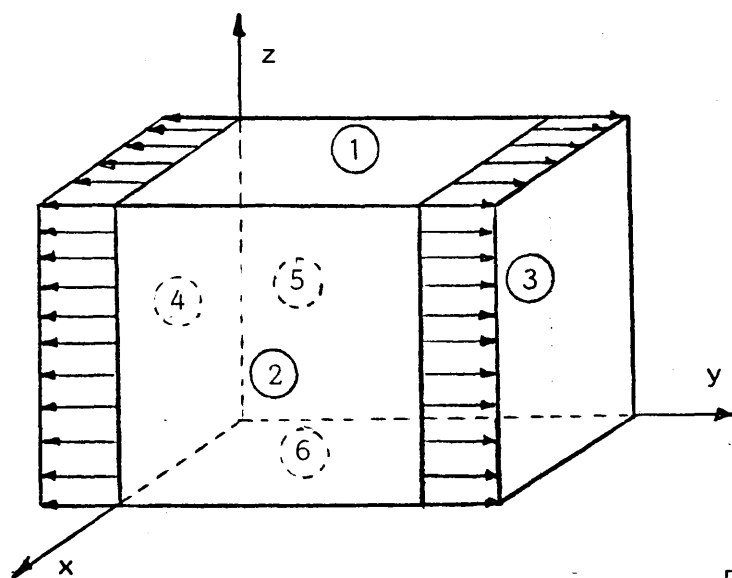


Fig. III.4.2

La primera de las opciones enunciadas exigiría dar las condiciones reales - en caras 3), 1) y 2) y en 5), 6) y 7), eliminar ciertas tensiones y sustituirlas por con condiciones de desplazamiento que impidan el movimiento como sólido rígido y que se - rían: desplazamiento nulo según z en la cara 6), desplazamiento nulo según x en la - cara 5) y desplazamiento nulo según y en la cara 4). Esto último, equivaldría a eli - minar las tensiones normales en dicha cara, valores que deben aparecer en las - reacciones en la misma al resolver el sistema de ecuaciones. Cualquier otra condi - ción, no simétrica de la anterior, modificaría la deformada del cubo. La segunda - opción sería dar las condiciones de contorno en tensiones y fijar condiciones de - apoyo en algunos de los nodos. Por ejemplo, si existieran nodos en los centros de - las caras, bastaría con impedir los movimientos normales de los nodos centrales - de las caras 4), 5) y 6). La forma en que operativamente se impondría esta condi - ción sobre el sistema de ecuaciones, podría ser simplemente anulando la fila y co - lumna de la matriz correspondiente al grado de libertad que se desea eliminar, ex - cepto el elemento de la diagonal principal que se haría igual a uno, y el término - correspondiente del vector de cargas se hace igual al valor del movimiento pres - crito.

Para el resto de las situaciones, la complejidad del tratamiento de las con condiciones de contorno está íntimamente ligada a la hipótesis de variación de las fun - ciones sobre los elementos de la discretización, pudiendo diferenciarse dos casos, según que la variación sea constante o no, ya que el que esta variación sea lineal= parabólica, cúbica, etc, no afecta al tratamiento, puesto que el problema radica - en la coexistencia en un nodo de varios elementos.

En efecto, puesto que en cada nodo sólo pueden aplicarse 3 ecuaciones in - tegrales, no es posible admitir más de tres incógnitas asociadas a él. Esto resul - ta inmediato en el caso de variación constante sobre el elemento, según se repre -

senta en la Fig. III.4.3 (aunque el elemento es un triángulo plano, el razonamiento sería válido para triángulos ó rectángulos, con una definición de la geometría - de orden superior).

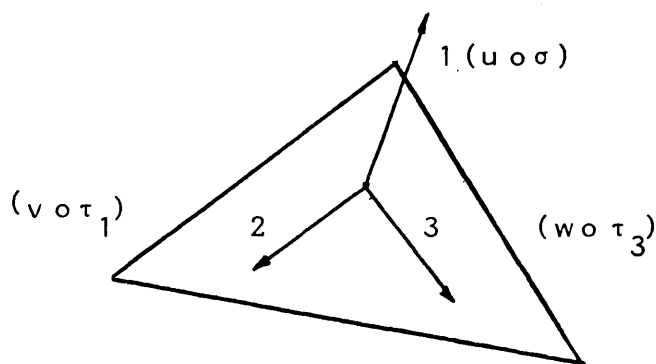


Fig. III.4.3

Es evidente que sean cuales sean las condiciones de contorno, en las tres direcciones locales del triángulo 1, 2 y 3, se conocerán tres de las seis variables asociadas a él:  $u, v, w, \sigma, \tau_1$  y  $\tau_2$  y nunca dos de ellas en la misma dirección. Por tanto, las tres restantes, constituyen las incógnitas del problema y está siempre determinado. Bastará conocer la posición de las incógnitas asociadas al triángulo en estudio en el sistema de ecuaciones para identificar la columna a la cual van las constantes de integración. La fila viene determinada por la posición que ocupa la ecuación integral del nodo desde el que se realiza la integración en el sistema de ecuaciones.

En cambio, en el caso en que la evolución es de orden superior al constante, surge el hecho de que los nodos pertenecen a dos ó más elementos, pudiendo aparecer un número no acotado de incógnitas asociadas a un nodo, superior al



número de ecuaciones que en él se pueden plantear. Para fijar las ideas, consideremos las dos situaciones de la Fig. III.4.4, en el caso plano

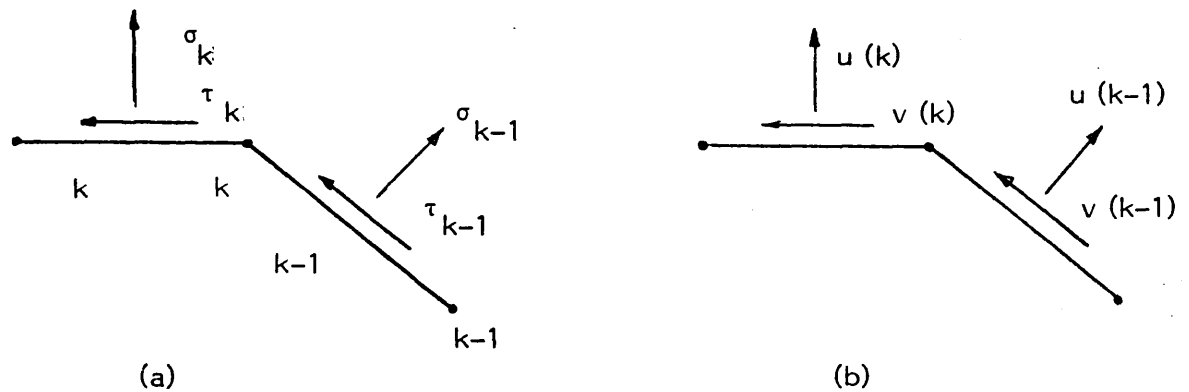


Fig. III.4.4

En la (a), en los elementos  $(k-1)$  y  $(k)$  adyacentes al nodo  $k$ , se conoce la evolución de las tensiones, y por tanto, las dos incógnitas asociadas al nodo  $k$  serían los movimientos de dicho nodo. Puesto que en él se pueden aplicar dos Ecuaciones Integrales, el problema está determinado.

En la (b), se conoce la evolución de los movimientos sobre  $(k-1)$  y  $(k)$ , y por tanto, las tensiones sobre dichos elementos constituyen las incógnitas del problema. En concreto, al nodo  $k$  aparecen asociadas 4 incógnitas,  $\sigma_{k-1}(k)$ ,  $\sigma_k(k)$ ,  $\tau_{k-1}(k)$ ,  $\tau_k(k)$ , donde el índice entre paréntesis representa el nodo del cual están asociados y el subíndice el elemento sobre el que se definen. Una completa información sobre la casuística del caso plano puede encontrarse en la ref [ ].

En el caso tridimensional que nos ocupa el problema se complica, para variación lineal o superior, por dos razones fundamentales.

La primera de ellas es inherente a la dimensión del problema que estamos estudiando, puesto que cada nodo lleva asociadas tres variables en lugar de dos. La segunda, y de más gravedad, es que el número de elementos que concurren en un nodo y por tanto de variables asociadas a él no está acotado. En 2D en un nodo solo posían concurrir 2 elementos y por tanto el número máximo de variables que a él se asociaban era de seis (dos movimientos y dos tensiones por elemento), quedando por tanto reducido a 4 (al menos 2 variables se conocen) el número máximo de incógnitas asociadas el nodo (Fig. III.4.4).

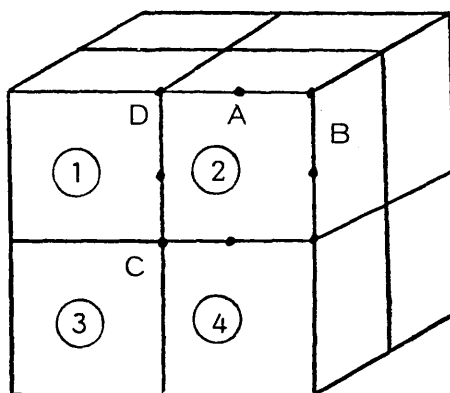


Fig. III.5.4

En el caso 3 D, con aproximación parabólica, el número mínimo de elementos que concurren en un nodo es de 2, caso del nodo A de la Fig. III.4.5 con 9 variables asociadas (3 movimientos y 6 tensiones, 3 de cada elemento) y sólo 3 Ecuaciones Integrales que aplicar. También pueden existir nodos como el B que pertenecen a 3 elementos con 12 variables asociadas o como el C o el D que pertenecen a 4 elementos y tienen por tanto 15 variables asociadas.

En muchas ocasiones, este número de variables, se reduce considerablemente por la configuración geométrica del contorno del punto en estudio. Así, por ejemplo, en el nodo C de la Fig. III.4.5 que pertenece a los elementos 1), 2), 3), 4), el vector tensión es continuo y por tanto, las 12 variables de tensión se reducen a 3. Puede evidentemente haber una discontinuidad en la aplicación de las cargas, pero en ese caso éstas son datos y por tanto sólo aparecen las 3 incógnitas del movimiento. Pueden aparecer, no obstante en dicho nodo, condiciones mixtas que complicarían el problema.

Planteada la naturaleza del problema y vislumbrada su dificultad, se hace preciso clasificar los diferentes casos que se puedan presentar. Esta clasificación puede ser hecha desde dos puntos de vista generales: La primera, presentando las diferentes condiciones que pueden aparecer, y la segunda atendiendo al tipo de solución o aproximación que se va a dar. Es evidente que las dos corresponden a la misma situación, sólo que contempladas desde dos puntos de vista distintos, que corresponden evidentemente a dos instantes diferentes de la resolución del problema.

Antes de especificar estas clasificaciones es preciso puntualizar la terminología que se va a utilizar.

- Los elementos serán referidos por el número de movimientos que se desconocen en el mismo. Evidentemente, en los nodos de un elemento las condiciones de contorno son cualitativamente las mismas, si bien pueden evolucionar los valores de las variables. Llamaremos elementos libres a aquellos en que no hay impuesta ninguna condición de movimiento. En la Fig. III.4.6a, se ha representado un elemento de estas características.

Denominaremos elementos de bolas a aquellos que tengan dos movimientos - posibles y el otro fijado. Fig. III.4.6 (b).

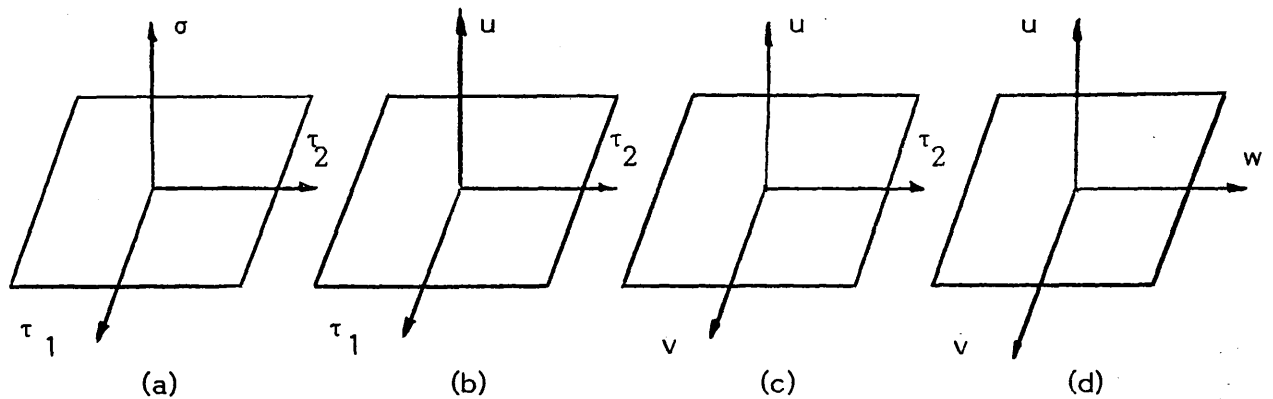


Fig. III.4.6

Elementos de rodillo serán aquellos que tengan un movimiento posible y los otros fijados Fig. III.4.6 (c).

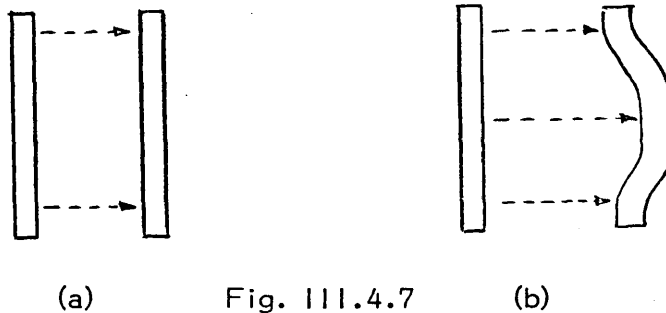
Llamaremos finalmente elemento empotrado a aquel que no tiene libertad de movimiento en ningún sentido que los tres componentes del mismo constituyen las condiciones de contorno.

En la Fig. III.4.6, se han representado las condiciones de contorno sobre los elementos. Sobre los casos (b) y (c) hay que hacer alguna puntualización. Siempre que exista uno ó dos datos en movimiento, uno de ellos será el movimiento normal al elemento. Así, en el caso que hemos llamado de bolas, la única representación que se considera es la de la Fig. III.4.6 (b). En el caso que hemos llamado de rodillo, también podría considerarse la posibilidad de conocer  $w$ ,  $\tau_1$ ,  $v$ , pero no sería válida  $\sigma$ ,  $u$ ,  $v$ .

De ahí la denominación de estos casos como bolas y rodillos porque ambos

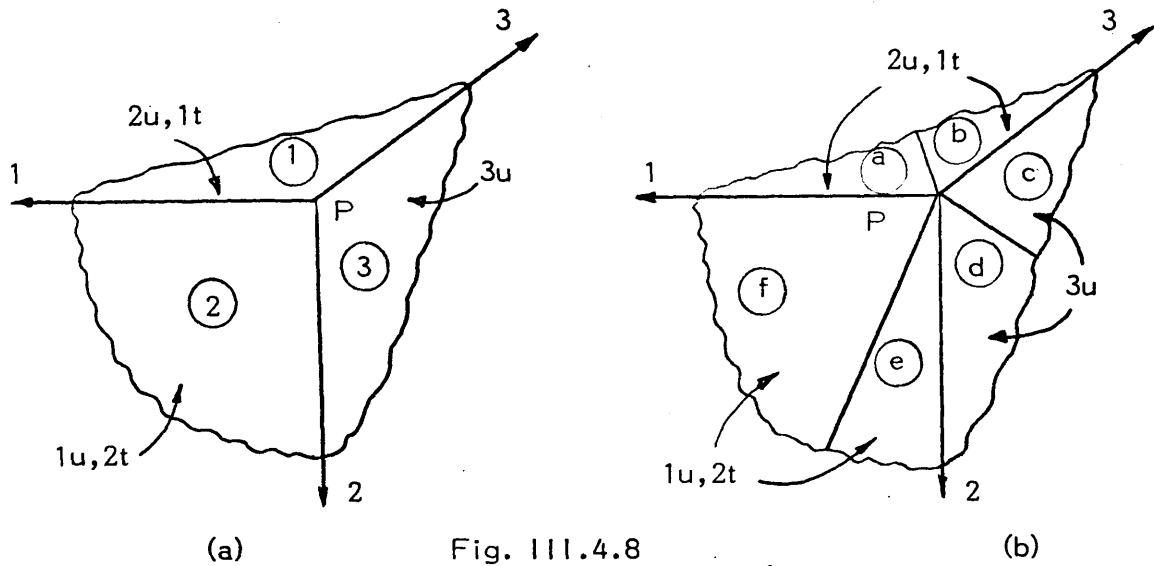
dispositivos físicos representan exactamente las condiciones que se van a admitir.

- En el estudio de las diferentes situaciones en que aparezca un rodillo, -  
consideraremos que éste es rígido, es decir que sólo son posibles movimientos -  
como el indicado en la Fig. III.4.7 (a), y no son posibles los indicados en la -  
Fig. III.4.7 (b). En la resolución del problema se razonará como si sólo fuera -  
posible la primera situación si bien esto no significa que no se pueden admitir ro-  
dillos no rígidos, aunque en este caso, la forma de razonar suponga una evidente  
aproximación.



- A partir de este momento vamos a incluir el término de cara en lugar -  
del elemento. Aquél cubre a éste. Al referirnos a un nodo, llamaremos cara al -  
conjunto de elementos que concurren en dicho nodo y que estando en el mismo pla-  
no tangente tienen las mismas condiciones de contorno.

Como aclaración nos referiremos a la Fig. III.4.8



En la Fig. III.4.8 (a), en el nodo P coinciden tres elementos 1), 2), 3) con las condiciones de contorno especificadas. En la Fig. III.4.8 (b), con las mismas condiciones de contorno, se han introducido en la discretización seis elementos. Sin embargo, existen las mismas caras que en la discretización de la Fig. III.4.8 (a), ya que los elementos a) y b) por ejemplo constituyen una cara. Sin embargo si la discretización de la Fig. III.4.8 fuera acompañada de las condiciones de contorno de la Fig. III.4.9 el número de caras sería 4, ya que los elementos e y f no tienen las mismas condiciones de contorno.

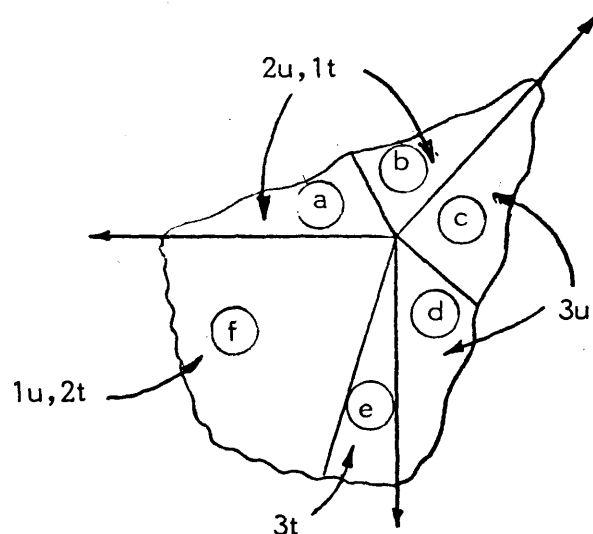


Fig. III.4.9

Cara 1, elementos a) y b).

Cara 2, elementos c) y d).

Cara 3, elemento e).

Cara 4, elemento f).

La distinción hecha entre caras y elementos es debida a que al establecer el número de incógnitas que están asociadas al nodo, dos elementos que pertenezcan a la misma cara no aportan nada más que 3 variables. Por eso, a partir de este momento y en este apartado hablaremos sólo de caras y las representaremos en forma simple tal y como se indica en la Fig. III.4.10, en la que también se especifica las incógnitas de cada caso.

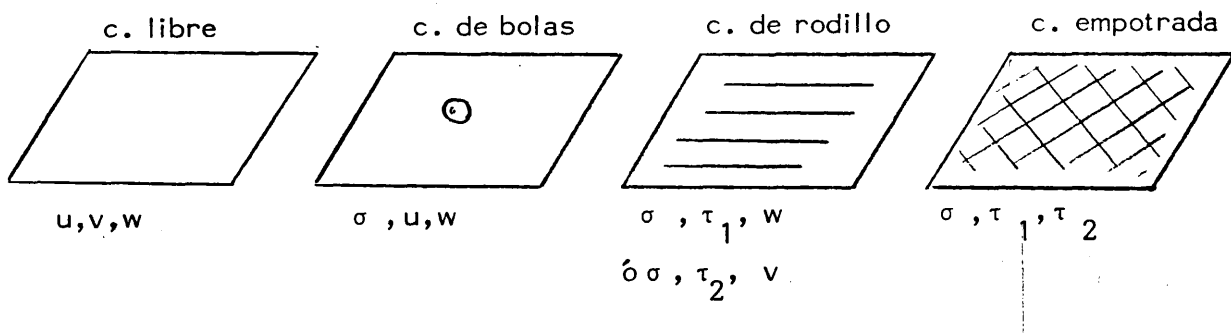


Fig. III.4.10

En lo que sigue trataremos todos los datos sobre los elementos en coordenadas locales. Los datos sobre los elementos pueden venir en coordenados globales, locales ó intrínsecas, que van asociadas a la numeración de los nodos. En cualquier caso, una sencilla transformación permite expresar éstas en coordenadas locales, por lo que estableceremos todo el razonamiento sobre dicho sistema.

Establecidas estas premisas, vamos a plantear diferentes clasificaciones que permitirán abordar el problema de las condiciones de contorno, en el caso que

nos ocupa. Una posible clasificación, atendiendo al tipo de condiciones existentes en los elementos (puros ó mixtos) y al tipo de incógnitas, sería:

1.- No hay condiciones mixtas sobre ningún elemento adyacente al nodo.

1.1.- Todas las caras que coinciden en el nodo tienen datos en movimiento.

1.2.- Todas las caras con datos en tensiones.

1.2.- Todas las caras con datos puros (no mixtos) pero mezclados.

2.- En algunos elementos hay condiciones mixtas.

2.1.- No hay incógnitas en movimiento.

2.1.1.- Al menos en una cara se conocen todos los movimientos.

2.1.2.- En ninguna cara se conocen los movimientos, pero es -  
tan fijadas tres direcciones linealmente independientes.

2.2.- Existen incógnitas en movimiento (no existe, por tanto, ninguna -  
cara completamente fija en movimientos).

2.2.1.- Hay 2 ó menos caras con condiciones en movimiento.

2.2.2.- Hay 3 ó más caras pero algunas son linealmente indepen-  
dientes.

Evidentemente, esta clasificación engloba todos los casos posibles, si bien sería preciso seguir estableciendo subapartados dentro de los ya especificados, - hasta llegar a casos muy concretos en los que se pudiera establecer la hipótesis - para resolver el problema.

Una forma más sistemática, aunque menos física de resolver el problema - sería establecer una clasificación en cuanto al número y tipo de caras que coinci -



dan en un nodo.

Si llamamos:

$n_0$  = Número de caras que coinciden en el nodo con 3 datos en tensión (caras libres).

$n_1$  = Número de caras que coinciden en el nodo con 2 datos en tensión (caras de bolas).

$n_2$  = Idem. con 1 dato en tensión (caras de rodillos).

$n_3$  = Idem. con 0 datos en tensión (cara empotrada).

Ordenando los tres números en el orden  $n_3 n_2 n_1 n_0$ , habría que estudiar cada posible combinación, por lo que la clasificación sería en la forma:

-	0	0	1	$n_0$
-	0	1	0	$n_0$
-	1	0	0	$n_0$
-	0	1	1	$n_0$
-	1	0	1	$n_0$
-	1	1	0	$n_0$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

El valor de  $n_0$  no aparece especificado, porque sea cual sea su valor, no afecta a la solución a adoptar, ya que no aporta nuevas incógnitas, pues al ser sus tres datos en tensiones sólo aporta incógnitas en movimientos, dependiendo pues de las condiciones de contorno sobre el resto de las caras no libres.

Al igual que sucedía en la clasificación anterior existen para cada caso una serie de apartados diferentes. Por ejemplo, si suponemos que en un nodo coinciden dos caras de rodillo y una cara libre, no se puede llegar a la misma solución,

si la disposición de los rodillos es la mostrada en la Fig. III.4.11 (a), que en la Fig. III.4.11 (b).

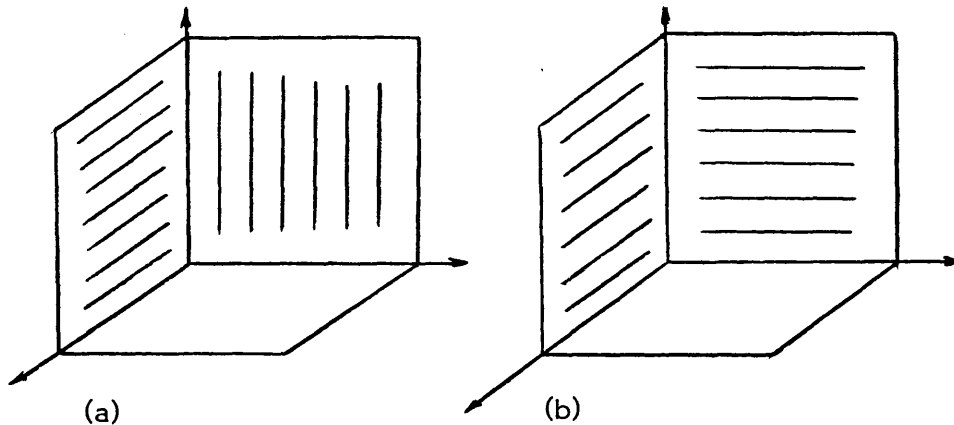


Fig. III.4.11

Una alternativa a estas formas de clasificar es, tal y como se ha dicho anteriormente, agrupar todas aquellas caras que tengan una solución similar.

Esta clasificación es la que se seguirá, pero con anterioridad se recordarán dos problemas generales, de la Teoría de elasticidad ya que como se verá más adelante las situaciones que se van a presentar en los nodos, se reducen a tres y en dos de ellos será preciso recurrir a los artificios que a continuación se explican.

El primero corresponde a la determinación de las direcciones principales de tensión y deformación conocida la evolución de los movimientos en tres direcciones definidas, linealmente independientes.

Nos referiremos a un sistema de ejes cartesianos  $x, y, z$ , (Fig. III.4.12) y a un sistema local  $1, 2, 3$  correspondiente a las direcciones sobre las cuales co -

nocemos la evolución de los movimientos que vendrán definidas por  $v_1, v_2, v_3$ .

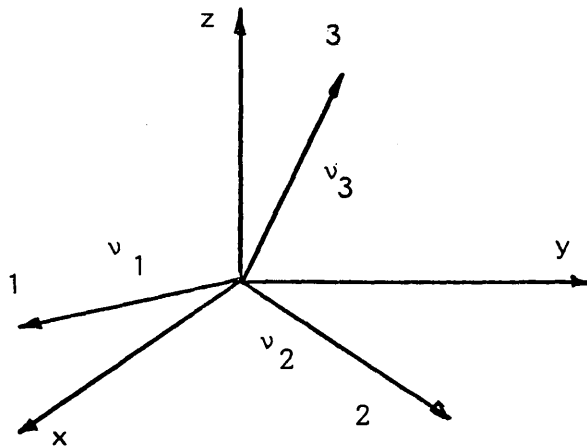


Fig. III.4.12

LLamando  $u, v, w$  a los campos de movimiento según los ejes  $x, y, z$  definidos en el entorno del origen, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{,1} &= \nabla u \cdot v_1 & v_{,1} &= \nabla v \cdot v_1 & w_{,1} &= \nabla w \cdot v_1 \\ u_{,2} &= \nabla u \cdot v_2 & v_{,2} &= \nabla v \cdot v_2 & w_{,2} &= \nabla w \cdot v_2 \\ u_{,3} &= \nabla u \cdot v_3 & v_{,3} &= \nabla v \cdot v_3 & w_{,3} &= \nabla w \cdot v_3 \end{aligned} \quad \text{III.4.1}$$

Antes de continuar el proceso general, hay que hacer notar que en la mayoría de los casos, se conocerán los datos en movimiento en coordenadas locales  $(u^L_{,1}, v^L_{,1}, w^L_{,1})$ , en tal caso, una transformación de ejes de la forma

$$u_{,1} = L_{,0}^L u^L_{,1}$$

donde  $L_0$  es la matriz usual de cosenos directores, permite encontrar las derivadas de los movimientos globales en las direcciones 1, 2, 3.

Las derivadas  $u_{,1}^L$  se obtienen como la tangente a una parábola definida por tres puntos (los tres nodos de la dirección que se considera)

Las ecuaciones III.4.1, se pueden poner también en la forma:

$$\begin{Bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \\ u_{,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \underline{v} \cdot \underline{u} \quad \text{III.4.2}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,1} \\ v_{,2} \\ v_{,3} \end{Bmatrix} = \underline{v} \cdot \underline{v} \quad \text{III.4.3}$$

$$\begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \\ w_{,3} \end{Bmatrix} = \underline{v} \cdot \underline{w} \quad \text{III.4.4}$$

Vamos a intentar calcular las evoluciones de los movimientos x, y, z, en - funciones de las evoluciones sobre 1, 2, 3, conocidas.

La relación buscada se puede expresar en la forma:

$$\begin{matrix} u_{,xyz} & = & A & \cdot & u_{,123} \\ (3,1) & & (3,3) & & (3,1) \end{matrix} \quad \text{III.4.5}$$

Efectivamente, a partir de III.4.1 y agrupando se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} u_{,1} & u_{,2} & u_{,3} \\ v_{,1} & v_{,2} & v_{,3} \\ w_{,1} & w_{,2} & w_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z} \end{bmatrix} \quad \text{III.4.6}$$

donde  $v_{ij}$  es la componente  $j$  del vector unitario de la dirección  $i$ .

Despejando la matriz de derivadas respecto a  $x, y, z$  y trasponiendo quedará

$$\left[ \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z} \end{bmatrix}^{-1} \right]^T \begin{bmatrix} u_{,1} & v_{,1} & w_{,1} \\ u_{,2} & v_{,2} & w_{,2} \\ u_{,3} & v_{,3} & w_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} \quad \text{III.4.7}$$

que es precisamente la expresión III.4.6, con

$$A = \left[ \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{2x} & v_{3x} \\ v_{1y} & v_{2y} & v_{3y} \\ v_{1z} & v_{2z} & v_{3z} \end{bmatrix}^{-1} \right]^T \quad \text{III.4.8}$$

Los componentes de A tendrán la siguiente expresión:

$$A_{11} = (v_{2y} v_{3z} - v_{3y} v_{2z}) / \Delta$$

$$A_{12} = -(v_{2x} v_{3z} - v_{3x} v_{2z}) / \Delta$$

$$A_{13} = (v_{2x} v_{3y} - v_{2y} v_{3x}) / \Delta$$

$$A_{21} = -(v_{1y} v_{3z} - v_{1z} v_{3y}) / \Delta$$

$$A_{22} = (v_{1x} v_{3z} - v_{3x} v_{1z}) / \Delta \quad \text{III.4.9}$$

$$A_{23} = -(v_{1x} v_{3y} - v_{3x} v_{1y}) / \Delta$$

$$A_{31} = (v_{1y} v_{2z} - v_{2y} v_{1z}) / \Delta$$

$$A_{32} = -(v_{1x} v_{2z} - v_{2x} v_{1z}) / \Delta$$

$$A_{33} = (v_{1x} v_{2y} - v_{2x} v_{1y}) / \Delta$$

donde

$$\Delta = v_{1x} v_{2y} v_{3z} + v_{2x} v_{3y} v_{1z} + v_{1y} v_{2z} v_{3x} - \\ - v_{1z} v_{2y} v_{3x} - v_{3y} v_{2z} v_{1x} - v_{1y} v_{2x} v_{3z} \quad \text{III.4.10}$$

Este valor de  $\Delta$  será nulo, cuando las tres direcciones  $v_1, v_2, v_3$  sean linealmente independientes, lo que implica que no es posible el establecimiento de las ecuaciones anteriores.

Por tanto, las relaciones buscadas son:

$$u_{,x} = A_{11} u_{,1} + A_{12} u_{,2} + A_{13} u_{,3} \\ u_{,y} = A_{21} u_{,1} + A_{22} u_{,2} + A_{23} u_{,3} \quad \text{III.4.11} \\ u_{,z} = A_{31} u_{,1} + A_{32} u_{,2} + A_{33} u_{,3}$$

y en forma análoga se establecerán relaciones similares para  $v$  y  $w$ .

Una vez obtenidos los resultados III.4.11 se pueden calcular las deformaciones unitarias, a través del tensor de Cauchy A1.3

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \epsilon_z = w_{,z} \quad \text{III.4.12} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} (u_{,z} + w_{,x}) \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} (v_{,z} + w_{,y})$$

Obtenido el tensor de deformaciones  $\epsilon_{ij}$ , podemos obtener los valores de las deformaciones principales; mediante

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y - \epsilon & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \quad \text{III.4.13}$$

Resolviendo el determinante obtenemos una ecuación de la forma:

$$\epsilon^3 + A \epsilon^2 + B \epsilon + C = 0 \quad \text{III.4.14}$$

donde A, B y C son las invariantes del tensor deformación

La resolución de la III.4.14, permite determinar los valores  $\epsilon_I$ ,  $\epsilon_{II}$ ,  $\epsilon_{III}$ , deformaciones principales del estado de deformación existente en el entorno del punto en estudio.

Existen varias situaciones según los valores relativos de  $\epsilon_I$ ,  $\epsilon_{II}$ ,  $\epsilon_{III}$ , que analizaremos a continuación:

$$\epsilon_I \neq \epsilon_{II} \neq \epsilon_{III}$$

En este caso, están determinadas las direcciones principales  $v_I$ ,  $v_{II}$ ,  $v_{III}$ , que se obtienen de la siguiente ecuación:



$$\begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y - \epsilon & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z - \epsilon \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{III.4.15}$$

para  $\epsilon = \epsilon_l$  y teniendo en cuenta que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

obtendríamos

$$\begin{Bmatrix} l_l \\ m_l \\ n_l \end{Bmatrix}$$

en forma análoga, sustituyendo  $\epsilon$  por  $\epsilon_{II}$  y por  $\epsilon_{III}$  obtendríamos:

$$\begin{Bmatrix} l_{II} \\ m_{II} \\ n_{II} \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} l_{III} \\ m_{III} \\ n_{III} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_l = \epsilon_{II} = \epsilon_{III}$$

En este caso, los tensores de deformación y tensión son esféricos, y cualesquiera 3 direcciones ortogonales son ejes principales. La solución más sencilla es hacer

$$v_I = i \quad v_{II} = j \quad v_{III} = k$$

$$\epsilon_I = \epsilon_{II} \text{ pero } \neq \epsilon_{III} \text{ (ó situación simétrica)}$$

El estado de tensiones se puede representar por un elipsoide de revolución. Para la deformación de valor diferente se halla su vector unitario en la forma explicada anteriormente y en un plano perpendicular, se calculan dos ejes cualesquiera perpendiculares entre sí.

Sea cual sea la solución de la ecuación III.4.14, una vez calculados los valores de  $v_I$ ,  $v_{II}$ ,  $v_{III}$  se puede expresar el vector tensión asociado a una dirección cualquiera en el espacio de tensiones principales. Fig. III.4.13. Así, si  $T^v$  representa el vector tensión asociado a una dirección cualquiera  $v^P$ :

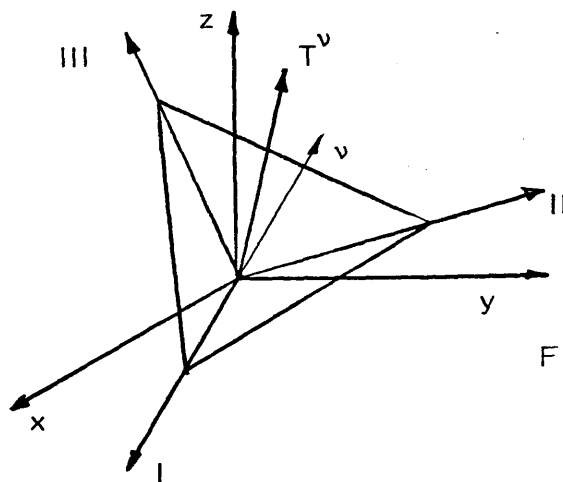


Fig. III.4.13

$$T^v = \sigma_P v^P$$

o explícitamente

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & \\ & \sigma_{II} & \\ 0 & & \sigma_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_I^P \\ v_I^P \\ v_I^P \end{Bmatrix} \quad \text{III.4.16}$$

donde  $v_I^P$  representa el vector dirección en el sistema de coordenadas principales (  $v_I^P$  es la componente de  $v$  sobre el eje I ).

El segundo problema que se va a resolver es el de expresar una componente del vector tensión en una dirección a partir del resto, de las componentes, y otro vector tensión en el mismo punto, en otra dirección. Esto se consigue, aplicando la relación de Cauchy entre los planos, asociados a dichas direcciones. Haciendo referencia a la Fig. III.4.14, supongamos que queremos expresar la tensión normal sobre la cara (a) en función de las tensiones sobre la cara (b) y el resto de las de la (a).

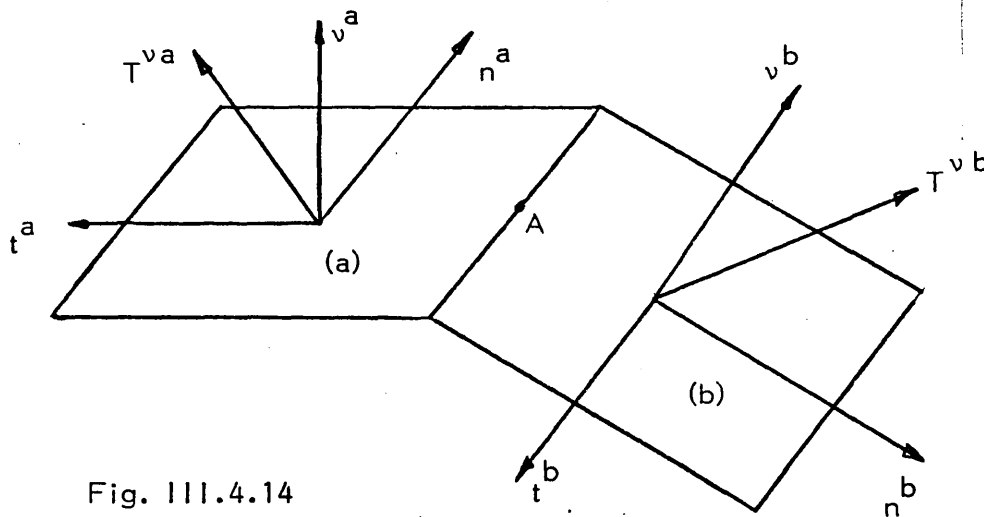


Fig. III.4.14

Es evidente que aunque en la Fig. III.4.14 hemos representado los ejes en el centro de las caras (a) y (b) nos estamos refiriendo a dos vectores tensión  $T^{va}$  y  $T^{vb}$  definidos sobre un punto común A.

La relación de Cauchy exige que:

$$T^{va}_v = T^{vb}_v \quad \text{III.4.17}$$

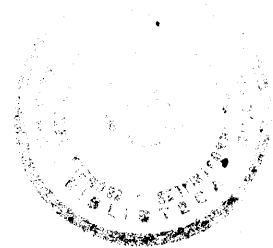
donde los vectores  $T^v$  y  $v$  están en coordenadas globales.

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$T^{va} = \begin{Bmatrix} -a \\ x \\ -a \\ y \\ -a \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 & n_1^a & t_1^a \\ v_2 & n_2^a & t_2^a \\ v_3 & n_3^a & t_3^a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_t \end{Bmatrix} \quad a$$

y que análogamente

$$T^{vb} = \begin{Bmatrix} -b \\ x \\ -b \\ y \\ -b \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 & n_1^b & t_1^b \\ v_2 & n_2^b & t_2^b \\ v_3 & n_3^b & t_3^b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_h \end{Bmatrix} \quad b$$



la expresión III.4.17, se transforma en:

$$\begin{pmatrix} v_1^b & v_2^b & v_3^b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1^a & n_1^a & t_1^a \\ v_2^a & n_2^a & t_2^a \\ v_3^a & n_3^a & t_3^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_t \end{bmatrix}^a = \begin{pmatrix} v_1^a & v_2^a & v_3^a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1^b & n_1^b & t_1^b \\ v_2^b & n_2^b & t_2^b \\ v_3^b & n_3^b & t_3^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_t \end{bmatrix}^b$$

que se puede poner en la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1^a & \bar{v}_2^a & \bar{v}_3^a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_t \end{bmatrix}^a = \begin{pmatrix} \bar{v}_1^b & \bar{v}_2^b & \bar{v}_3^b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau_n \\ \tau_t \end{bmatrix}^b \quad \text{III.4.18}$$

donde:

$$\bar{v}_1^a = v_1^b v_1^a + v_2^b v_2^a + v_3^b v_3^a$$

$$\bar{v}_2^a = v_1^b n_1^a + v_2^b n_2^a + v_3^b n_3^a$$

$$\bar{v}_3^a = v_1^b t_1^a + v_2^b t_2^a + v_3^b t_3^a$$

y análogamente

$$\bar{v}_1^b = v_1^a v_1^b + v_2^a v_2^b + v_3^a v_3^b$$

$$\frac{-b}{v_2} = v_1^a n_1^b + v_2^a n_2^b + v_3^a n_3^b$$

$$\frac{-b}{v_3} = v_1^a t_1^b + v_2^a t_2^b + v_3^a t_3^b$$

de la expresión III.4.18 podemos ya despejar el valor de  $\sigma^b$ .

$$\sigma^b = \frac{\frac{-v_1^a}{v_1^b}}{\frac{-v_1^b}{v_1^b}} \sigma^a + \frac{\frac{-v_2^a}{v_2^b}}{\frac{-v_1^b}{v_1^b}} \tau_n^a + \frac{\frac{-v_3^a}{v_3^b}}{\frac{-v_1^b}{v_1^b}} \tau_t^a - \frac{\frac{-v_2^b}{v_2^b}}{\frac{-v_1^b}{v_1^b}} \tau_n^b - \frac{\frac{-v_3^b}{v_3^b}}{\frac{-v_1^b}{v_1^b}} \tau_t^b$$

III.4.19

La expresión III.4.19 y las similares, permiten pues, expresar una componente de la tensión en un punto, en función del resto y de otro vector tensión asociado a ese punto en otra dirección.

La expresión III.4.19, definida está en coordenadas locales (las tensiones) porque éstas serán normalmente las componentes de los vectores tensión que se manejarán en los problemas, tanto si son valores conocidos, como si constituyen las incógnitas del problema.

La única salvedad que es necesario hacer es que debido a que las coordenadas locales son diferentes para cada elemento, es necesario hacer una transformación de las normales  $v^a$  y  $v^b$  para expresarlas en componentes intrínsecas del elemento contrario, para poder realizar el producto escalar por la  $T^v$  correspondiente.

Finalizados los dos desarrollos anteriores, vamos a ver que todas las posi-

bilidades de actuación en la determinación de las incógnitas asociadas a un nodo se pueden resumir en tres, que llamamos: de aplicación recta, de aplicación de la - condición de Cauchy y de uso de las tensiones principales.

#### III.4.1.- APLICACION DIRECTA

En este caso, solo existen tres incógnitas asociadas al nodo, por lo que el único problema estriba en determinar cuales son, según las condiciones que existen sobre cada uno de los elementos que concurren en él. Vamos a considerar independientemente todas las caras aunque el número de incógnitas es de 3. Utilizaremos para identificar cada cara, un número de 4 cifras  $n_0, n_1, n_2, n_3$  que representará, como ya se dijo, el número de caras libres, de bolas, de rodillos y empotradas.

1.- Todas las caras que coinciden en el nodo son libres ( $0 \ 0 \ 0 \ n_0$ ). En este caso, las tres incógnitas asociadas al nodo son las tres componentes del movimiento en coordenadas globales.

2.- Existe una cara de bolas y el resto son caras libres ( $0 \ 0 \ 1 \ n_0$ ).

Fig. III.4.1.1, nodo A. En este caso las tres incógnitas asociadas al nodo son:

- La tensión normal en la cara de bolas (en el nodo A).
- Los dos movimientos en el propio plano de la cara de bolas (en el nodo A).

En éste como en los casos que siguen se representan las caras sobre un triedro por comodidad, sin que ello signifique pérdida de generalidad. En los casos en que los ángulos jueguen un papel importante se indicará tácitamente.



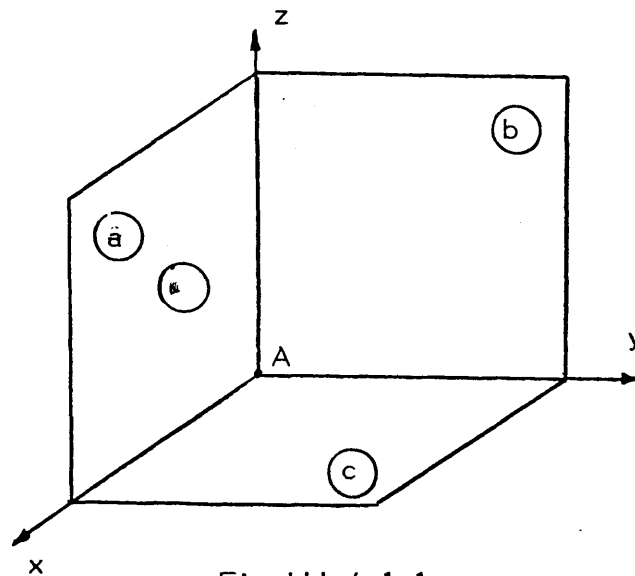


Fig. III.4.1.1

3.- Existe una cara de rodillos y el resto son caras libres ( $0 \ 1 \ 0 \ n_o$ ) nodo A de la Fig. III.4.1.2.

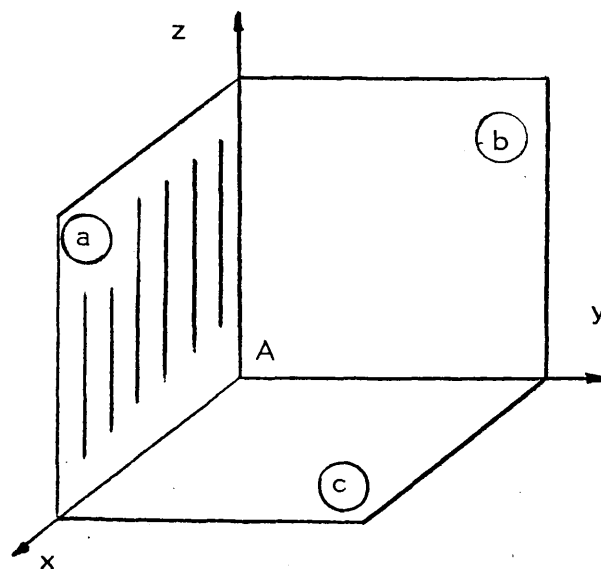


Fig. III.4.1.2

Las tres incógnitas asociadas al nodo son:

- El movimiento en la dirección que permite el rodillo (dirección x en el no

do A en la Fig. III.4.1.2.

- La tensión normal y la tensión en la dirección longitudinal al rodillo en dicha cara (direcciones y, z respectivamente en la cara de rodillos (a) de la figura III.4.1.2.

4.- Existe una sola cara empotrada y el resto son caras libres ( $1 \ 0 \ 0 \ n_o$ ) nodo A de la Fig. III.4.1.3. (El hecho de usar el término empotrado no significa - que los movimientos sean nulos en dicha cara, sino simplemente que se conocen. - Algo análogo puede decirse de las caras de bolas y de las de rodillo).

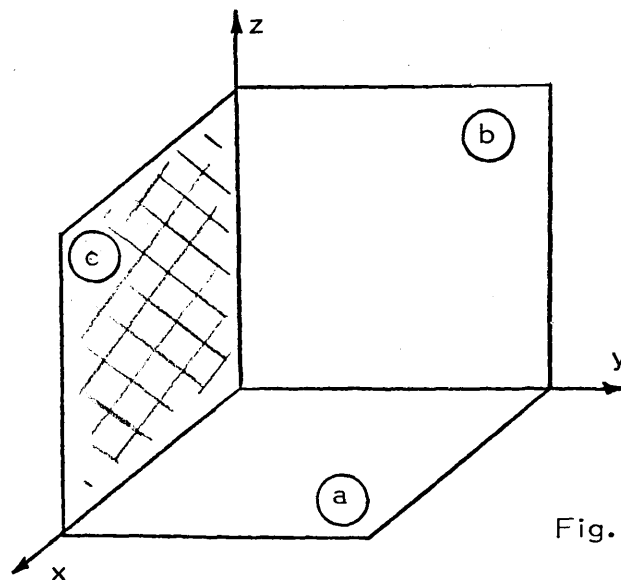


Fig. III.4.1.3

Las tres incógnitas asociadas al nodo son las tres tensiones del nodo A en la cara empotrada.

No hay incógnitas en movimiento ya que por pertenecer el nodo A a la cara empotrada, se conocen sus tres movimientos.

5.- Existen dos caras de bolas y el resto de las caras son libres ( $0\ 0\ 0\ n_o$ )  
Punto A de la Fig. III.4.1.4.

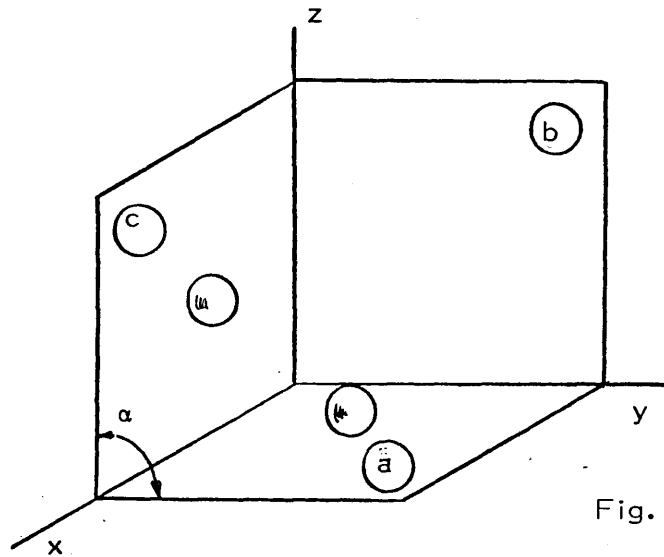


Fig. III.4.1.4

Las caras de bolas, impiden dos movimientos en el nodo A, por ello las incógnitas del nodo son:

- Un movimiento (no contenido en el plano definido por las normales a las caras de bolas).

- Las dos tensiones normales a las caras de bolas.

El valor del ángulo  $\alpha$  no influye en el tratamiento del problema.

6.- Existe una cara de bolas y una cara de rodillos que no son perpendiculares a la arista común, estando el resto de las caras libres. Nodo A de la Fig. III.4.1.5.

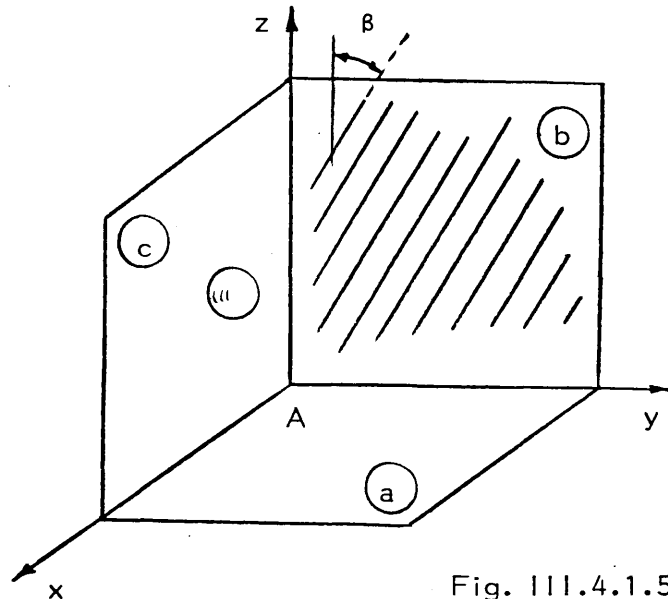


Fig. III.4.1.5

Para cualquier valor de  $\alpha$  y siempre que  $\beta \neq 90^\circ$  los tres movimientos del nodo A están determinados. Por tanto, no hace falta manipular los datos, ya que las incógnitas son:

- Tensión normal en la cara de bolas.
- Tensión normal en el rodillo y tangencial en su dirección.

Si  $\beta = 90^\circ$  en el nodo A el movimiento según z es una incógnita, siendo necesario eliminar una de las tensiones relacionandola con las demás (vease III.4.2)

7.- Existen tres caras de bolas siendo el resto de las caras libres. nodo A de la Fig. III.4.1.6.

Al estar fijados los movimientos en tres direcciones linealmente independientes (las normales a las caras de bolas) no hay incógnitas en movimiento. Las tres incógnitas del nodo A son las tensiones normales a las caras de bolas.

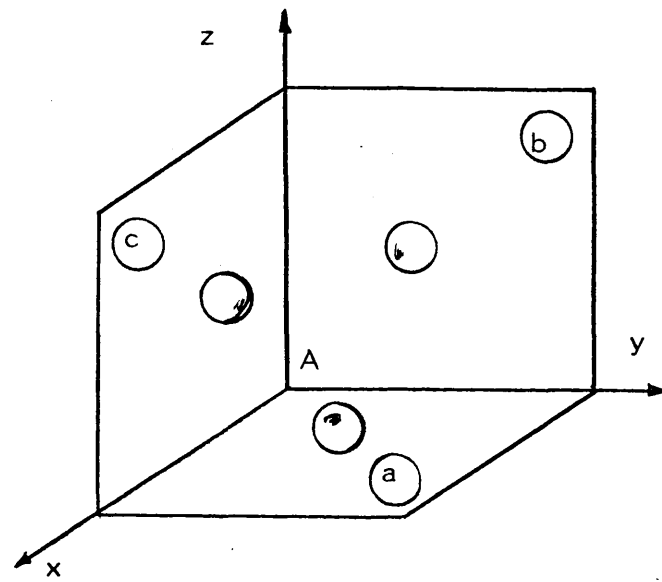


Fig. III.4.1.6

### III.4.2.- APLICACION DE LA RELACION DE CAUCHY

En los casos descritos anteriormente, no ha sido preciso manipular los datos existentes, pues en todos ellos no existían más de tres incógnitas asociadas al nodo. En los casos que siguen, existe un exceso de variables asociadas al nodo y se rá preciso usar la relación de Cauchy, de una u otra forma para reducir el número de incógnitas a 3. El grado de aproximación que se introduce es diferente en cada caso, según el tipo de suposición que se establezca y que se irá describiendo a continuación para cada uno de ellos.

1.- Existen dos caras de rodillos y el resto de las caras que concurren en el nodo son libres (0, 2, 0  $n_o$  ).

Puesto que caben diferentes disposiciones en las caras entre sí y de los rodillos con respecto a la arista común estudiaremos varios casos.

1.1.- Los rodillos no son perpendiculares a la arista común. (nodo A Fig. III.4.2.1).

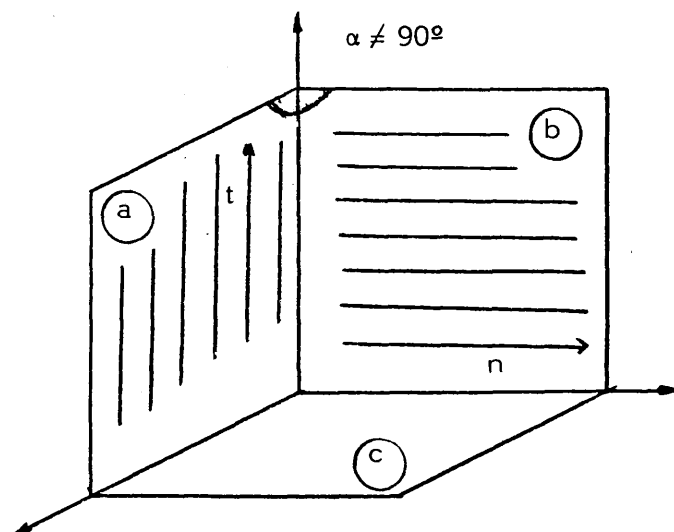


Fig. III.4.2.1

En este caso, el movimiento está totalmente impedido en el nodo A y en principio existen 4 incógnitas (dos por cada rodillo), por lo que de la ecuación III.4.18 se puede despejar  $\tau_n^b$  supuesta n la dirección de los rodillos en la cara b).

$$\tau_n^b = -\frac{\bar{v}_1^a}{\bar{v}_2^b} \sigma_n^a + \frac{\bar{v}_2^a}{\bar{v}_2^b} \tau_n^a + \frac{\bar{v}_3^a}{\bar{v}_2^b} \tau_t^a - \frac{\bar{v}_1^b}{\bar{v}_2^b} \sigma_n^b - \frac{\bar{v}_3^b}{\bar{v}_2^b} \tau_t^b$$

donde se ha puesto  $\tau_n^b$  en función  $\tau_n^a$  y  $\tau_t^b$  (datos) y de  $\sigma_n^a$ ,  $\sigma_n^b$ ,  $\tau_t^a$  que quedan como las incógnitas del nodo A.

Los rodillos se han presentado como paralelos y perpendiculares a la arista común, pero pueden tener dirección cualquiera.

1.2.- Los rodillos son perpendiculares a la arista común. En este caso, tal como se aprecia en la Fig. III.4.2.2, existe posibilidad de movimiento en la dirección de la arista común. Por ello hay en principio 5 incógnitas asociadas a un nodo tal como el A de la Fig. III.4.2.2: el movimiento y las dos tensiones por cada rodillo.

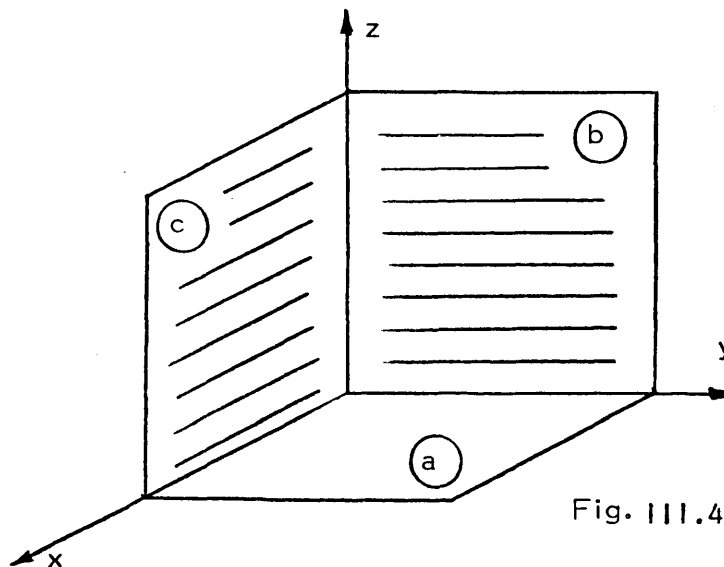


Fig. III.4.2.2

Para reducir el número de incógnitas a tres, anulamos una de las tensiones tangenciales, lo que constituye una evidente aproximación, y la otra la calcularemos empleando la relación de Cauchy.

2.- Existe una cara de rodillos y una cara de bolas, estando el resto de las caras libres. Además los rodillos son perpendiculares a la arista común. Nodo A de la Fig. III.4.2.3.  $(0 \ 1 \ 1 \ n_o)$ .

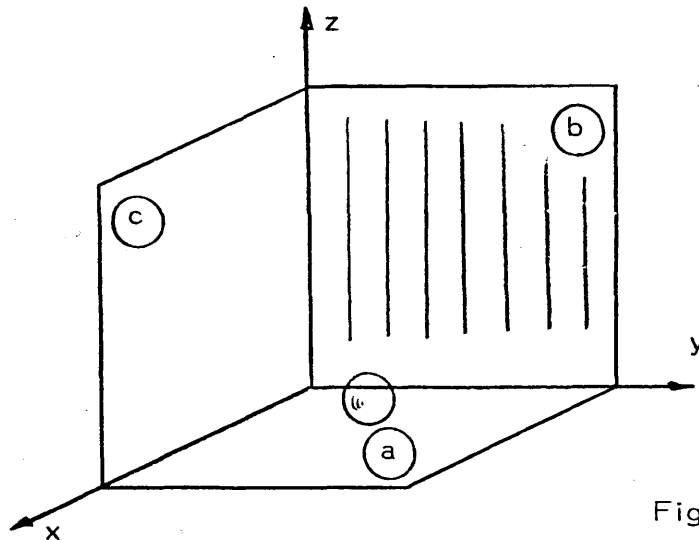


Fig. III.4.2.3

Existen cuatro incógnitas asociadas a un nodo de estas características. Un movimiento (en la dirección z en la Fig III.4.2.3) y tres tensiones (dos del rodillo y una de la bola).

La relación de Cauchy permite eliminar una de las tensiones incógnitas. Por ejemplo, la tensión tangencial en el rodillo

$$\tau_{n \ b} = \frac{\frac{-a}{v} \frac{1}{2}}{\frac{-b}{v} \frac{2}{2}} \sigma^a + \frac{\frac{-a}{v} \frac{2}{2}}{\frac{-b}{v} \frac{2}{2}} \tau_{n \ a} + \frac{\frac{-a}{v} \frac{3}{2}}{\frac{-b}{v} \frac{2}{2}} \tau_{t \ a} - \frac{\frac{-b}{v} \frac{1}{2}}{\frac{-b}{v} \frac{2}{2}} \sigma^b - \frac{\frac{-b}{v} \frac{3}{2}}{\frac{-b}{v} \frac{2}{2}} \tau_{t \ b}$$



donde  $\sigma^a$  y  $\sigma^b$  son las incógnitas del problema junto con los movimientos y  $\tau_n^a, \tau_t^a$  y  $\tau_n^b, \tau_t^b$  son datos.

3.- Existe una cara empotrada y una cara de bolas, estando el resto de las caras libres. (1 0 1  $n_o$ ) nodo A de la Fig. III.4.2.4

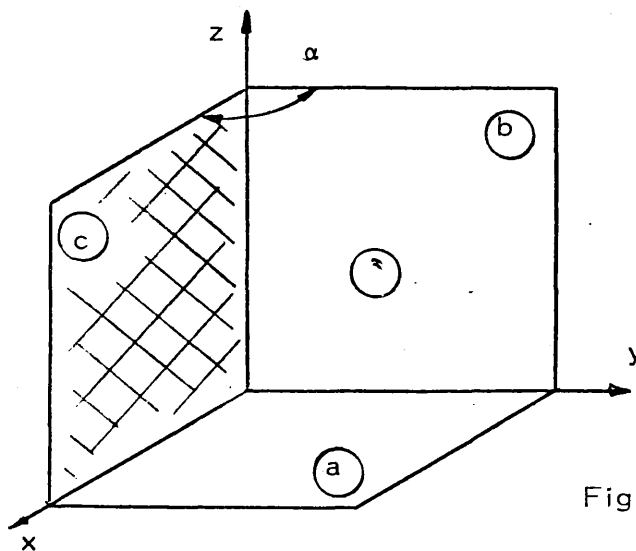


Fig. III.4.2.4

Aunque conceptualmente idénticos operativamente podemos distinguir dos casos:

3.1.- Las caras empotradas y de bolas no son perpendiculares entre sí. ( $\alpha \neq 90^\circ$  en la Fig. III.4.2.4).

Existen 4 incógnitas en tensión (tres de la cara empotrada y una de la cara de bolas). La relación de Cauchy permite eliminar la tensión normal en esta última cara.

$$\sigma^b = -\frac{\bar{v}_1^a}{\bar{v}_1^b} \sigma^a + \frac{\bar{v}_2^a}{\bar{v}_1^b} \tau_n^a + \frac{\bar{v}_3^a}{\bar{v}_1^b} \tau_t^a - \frac{\bar{v}_2^b}{\bar{v}_1^b} \tau_n^b - \frac{\bar{v}_3^b}{\bar{v}_1^b} \tau_t^b$$

donde  $\sigma^a$ ,  $\tau_n^a$ ,  $\tau_t^a$  son las incógnitas del problema y  $\tau_n^b$  y  $\tau_t^b$  datos.

3.2.- Las caras empotradas y de bolas son perpendiculares entre sí ( $\alpha = 90^\circ$  en la Fig. III.4.2.4).

Existen las mismas incógnitas, pero no es posible eliminar la tensión normal de la cara de bolas, puesto que la relación de Cauchy en este caso, identifica solo - tensiones normales a la arista común. Será preciso por tanto, eliminar la tensión - tangencial de la cara empotrada que sea normal a la arista común (dirección n en la Fig. III.4.2.4).

$$\tau_n^a = -\frac{\frac{-b}{\sqrt{v}}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \sigma^b + \frac{\frac{-b}{\sqrt{v}}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \tau_n^b + \frac{\frac{-b}{\sqrt{v}}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \tau_t^b - \frac{\frac{-a}{\sqrt{v}}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \sigma^a - \frac{\frac{-a}{\sqrt{v}}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} \tau_t^a$$

donde  $\sigma^b$ ,  $\sigma^a$ ,  $\tau_t^a$  son las incógnitas del nodo y  $\tau_n^b$  y  $\tau_t^b$  son datos.

4.- Existe una cara de rodillos y dos de bolas, estando el resto de las caras libres (0 1 2 n<sub>o</sub>). Nodo A de la Fig. III.4.2.5

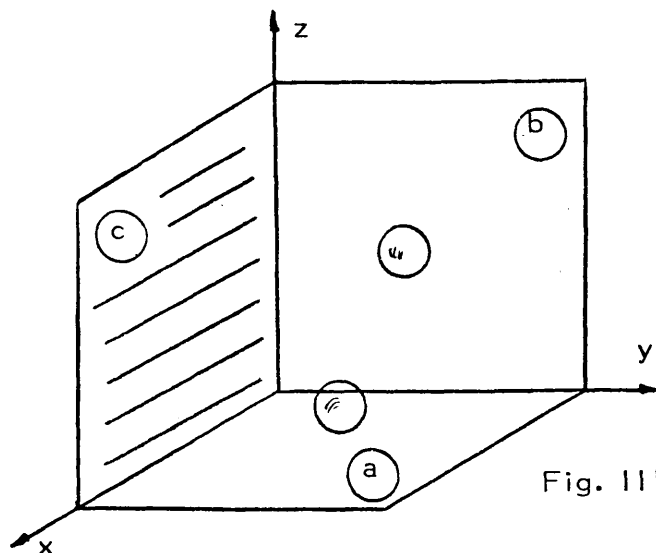


Fig. III.4.2.5

No existen incógnitas en movimiento y hay cuatro incógnitas en tensiones - (dos del rodillo y una por cada cara de bolas). Eliminamos la tensión tangencial del rodillo, aplicando la relación de Cauchy en la cara de bolas conveniente.

$$\tau_n^a = -\frac{\bar{v}^b}{\bar{v}^a} \frac{1}{2} \sigma^b + \frac{\bar{v}^b}{\bar{v}^a} \frac{2}{2} \tau_n^b + \frac{\bar{v}^b}{\bar{v}^a} \frac{3}{2} \tau_t^b - \frac{\bar{v}^b}{\bar{v}^a} \frac{1}{2} \sigma^a - \frac{\bar{v}^b}{\bar{v}^a} \frac{3}{2} \tau_t^a$$

donde  $\sigma^b$  y  $\sigma^a$  son incógnitas y las  $\tau$  son todos datos.

5.- Existe una cara empotrada y dos caras de bolas, estando el resto de - las caras libres. Nodo A de la Fig. III.4.2.6. (1 0 2  $n_o$ ).

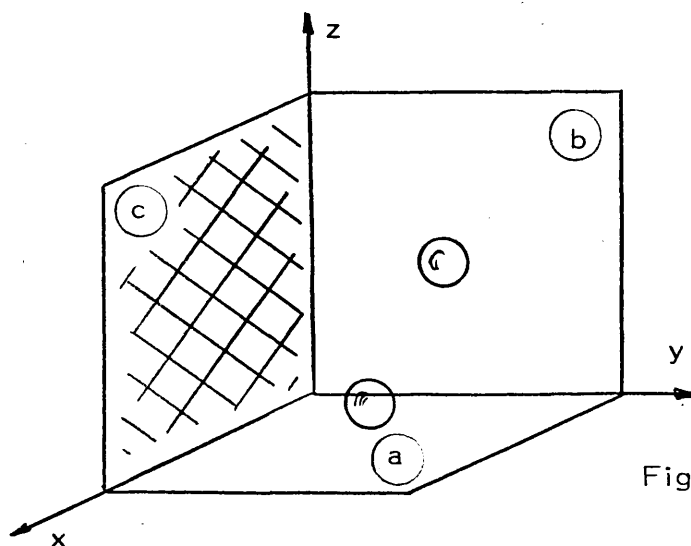


Fig. III.4.2.6

El caso 3 sirve como explicación de la solución que se va a dar a este caso, puesto que cada cara de bolas se trata independientemente con respecto a la cara - empotrada con arreglo a lo dicho en el caso 3. Por tanto, si las tres caras no son= perpendiculares entre sí, de idéntica forma se eliminan las tensiones de las caras= de bolas y nos quedamos sólo con las de la cara empotrada. Si alguna cara de bola=

es normal a la cara empotrada se elimina una incógnita de tensión tangencial de la cara empotrada de (según la forma indicada en 3.2) y se incluye la tensión normal a la cara de bolas.

6.- Existe una cara de bolas y dos caras de rodillos, cumpliéndose que dichos rodillos no son perpendiculares a la arista común o no son paralelos a la cara de bolas,  $(0 \ 2 \ 1 \ n_o)$ . El resto de las caras están libres. Nodo A de la Fig. III.4.2.7

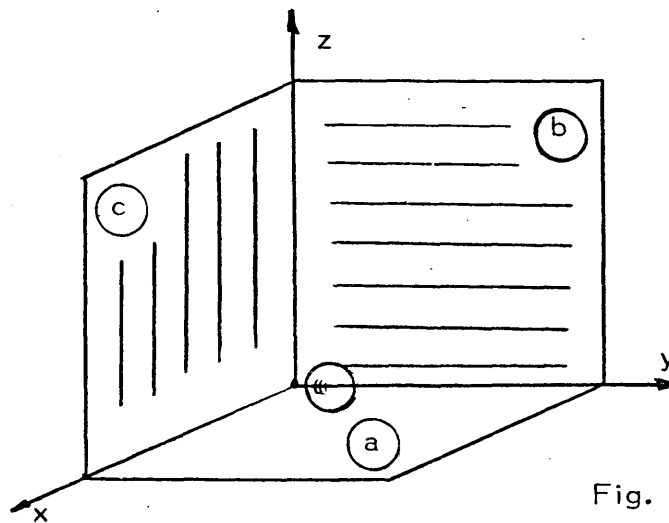


Fig. III.4.2.7

No existen incógnitas en movimiento y se trata de un caso de aplicación de Cauchy pues las 5 incógnitas de tensión que existen (dos por cada rodillo y una por la cara de bolas se pueden reducir a tres. (las tensiones normales en las tres caras aplicando dos veces la relación). Si ninguna de las caras de rodillo es paralela a la cara de bolas, se eliminan las tensiones tangenciales de los rodillos. Así para la cara a) de la Fig. III.4.2.7.

$$\tau_{t \ a} = \frac{-c}{\sqrt{v_1}} \sigma^c + \frac{-c}{\sqrt{v_2}} \tau_{n \ c} + \frac{-c}{\sqrt{v_3}} \tau_{t \ c} - \frac{-a}{\sqrt{v_1}} \sigma^a - \frac{-a}{\sqrt{v_2}} \tau_{n \ a}$$

Si el rodillo es paralelo a la cara de bolas, no puede eliminarse la tensión tangencial en la forma indicada anteriormente. En este caso, se elimina con las tensiones de la otra cara del rodillo (es posible que los dos rodillos sean perpendiculares a la arista común, y en ese caso, no se podría aplicar la relación de Cauchy entre ambas, por lo que se trata como un caso de tensiones principales, tal como se verá más adelante).

En el caso de la Fig. III.4.2.7, para eliminar la tensión tangencial  $\tau_n$  en la cara b) de rodillos, hacemos:

$$\tau_n^b = \frac{-b}{v_1} \sigma^a + \frac{-b}{v_2} \tau_n^a + \frac{-b}{v_3} \tau_t^a - \frac{-a}{v_1} \sigma^b - \frac{-a}{v_3} \tau_t^b$$

donde  $\sigma^a$  y  $\sigma^b$  son incógnitas  $\tau_t^b$  y  $\tau_n^a$  son datos y  $\tau_t^a$  está relacionada según la expresión anterior con  $\sigma^c$  y  $\sigma^a$  incógnitas y  $\tau_n^c$   $\tau_t^c$  y  $\tau_n^a$  datos por lo que el problema está determinado.

### III.4.3.- CASO DE TENSIONES PRINCIPALES

Anteriormente, se vió que cuando se conocía la evolución de los movimientos según tres direcciones linealmente independientes, era posible evaluar las direcciones principales de tensión y deformación, y por tanto, todas las incógnitas en tensión se pueden expresar en función de las tensiones principales que constituirán por tanto, las tres incógnitas del problema. En otras ocasiones no se conocerá la evolución de movimientos anteriormente indicados, pero si será posible establecer una hipótesis de forma directa sobre las direcciones principales, por lo que el problema queda igualmente determinado. Los casos tratados de esta forma son:

1.- Dos ó tres caras empotradas y el resto libres  $n_3 = 0$  ó  $n_0$  con  $n_3 \geq 2$  - nodo A de la Fig. III.4.3.1.

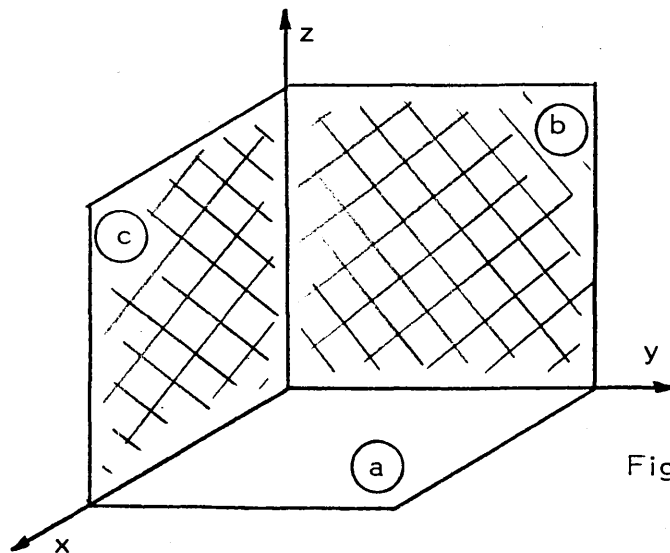


Fig. III.4.3.1

No hay incógnitas en movimientos y hay tantas en tensiones como número de caras empotradas multiplicadas por tres. Se conoce la evolución de los movimientos en 3 direcciones linealmente independientes, direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , de la Fig. III.4.3.1. Se sigue por tanto el proceso explicado anteriormente que permite expresar todas las incógnitas en tensión a partir de las tres principales.

En el caso de que haya tres caras empotradas, el proceso es exactamente el mismo.

2.- Tres caras de rodillos. Distinguiremos dos casos:

2.1.- Tres caras de rodillos siendo dos de ellos paralelos y el resto libre  $= (0 \ 3 \ 0 \ n_0)$ . Nodo A de la Fig. III.4.3.2.

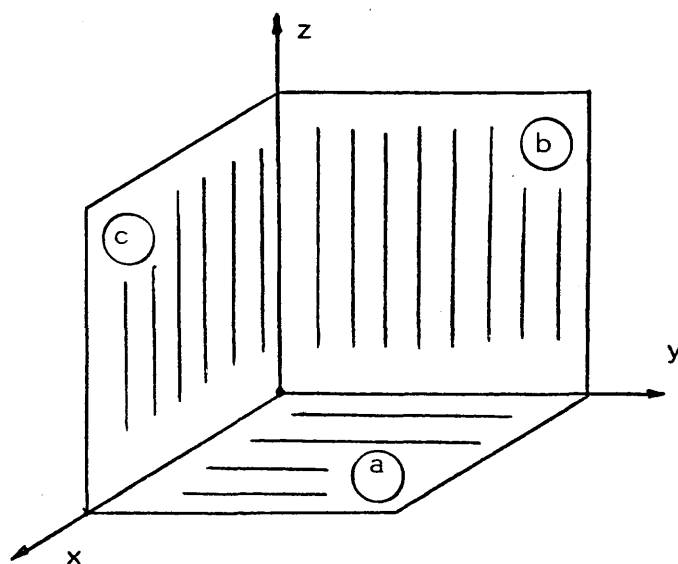


Fig. III.4.3.2

En este caso, el nodo A no se puede mover y además, hacemos la hipótesis de que la variación de los movimientos a lo largo de tres direcciones es nula, por lo que el tensor de deformaciones es nulo y por tanto esférico. Las direcciones globales pueden ser tomadas como direcciones principales expresando las tensiones incógnitas de cada cara a partir de las tensiones principales, al igual que en el ca-

so anterior.

2.2.- Tres caras de rodillos, cada dos de las cuales no son paralelas  
(0 3 o  $n$ ). Nodo A de la Fig. III.4.3.3.

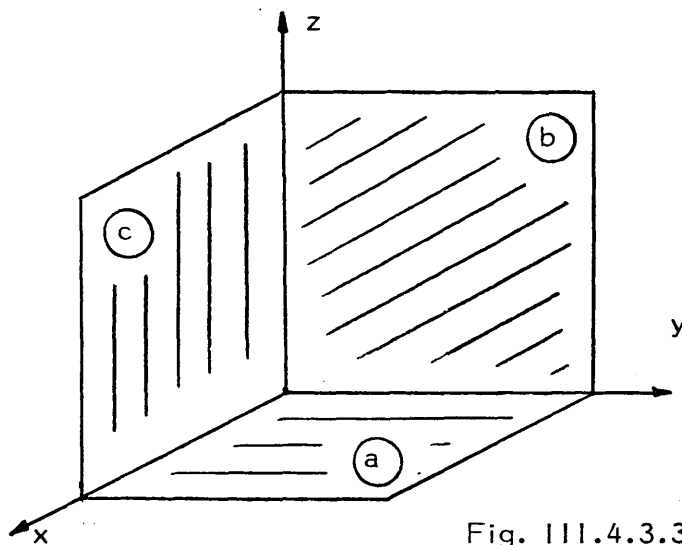


Fig. III.4.3.3

En este caso, se conocen los movimientos en el nodo A pero hay exceso de incógnitas en tensión. La aplicación de las tensiones principales, requiere el conocer la variación de los tres movimientos en 3 direcciones linealmente independientes.

Aquí se conoce sólo la de los movimientos en 3 direcciones. En vez de conocer el tercer movimiento, se conoce una tensión tangencial. La hipótesis que se establece es que la variación del tercer movimiento sobre la cara del rodillo es igual a la evolución de la tensión tangencial conocida. De esta manera, se pueden determinar las direcciones principales.

3.- Una cara empotrada y una cara de rodillos, estando el resto de las ca-



ras libres. Según la posición relativa del rodillo con respecto a la cara empotrada, podemos considerar dos casos:

3.1.- Rodillo no paralelo a la arista común  $(1 \ 1 \ 0 \ n_o)$ . Nodo A de la Fig. III.4.3.4.

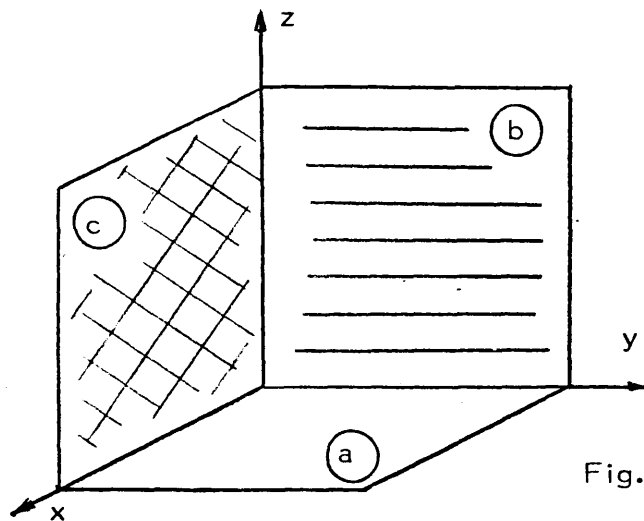


Fig. III.4.3.4

Se conocen los tres movimientos y hay cinco tensiones incógnitas (una se podría eliminar aplicando una relación de Cauchy, pero no la otra). Se conoce la evolución de los movimientos en dos direcciones, (x, z en la Fig. III.4.3.4).

En la dirección y, se conoce la evolución sólo de dos movimientos (el u y el v en la Fig. III.4.3.4).

La evolución del movimiento w se estima por la evolución de la tensión tangencial conocida en la cara de rodillos ( $\tau_{xz}$  en la Fig). El proceso una vez determinadas las direcciones principales es el usual.

3.2.- Rodillo paralelo a la arista común  $(1 \ 1 \ 0 \ n_o)$ . Nodo A de la Fig. III.4.3.5.

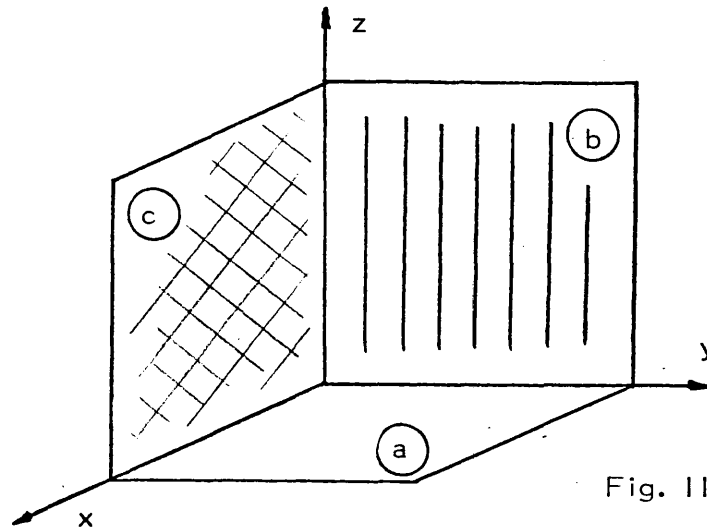


Fig. III.4.3.5

En este caso solo se conoce la variación de movimientos en las direcciones correspondientes a las aristas de la cara empotrada. Es necesario pues hacer otra hipótesis.

Consideramos una dirección principal, la dirección de movimiento del rodillo y una segunda dirección principal que sería una de las aristas de la cara empotrada.

Evidentemente, la tercera dirección se calcularía a partir del producto vectorial de las dos anteriores.

4.- Una cara empotrada, una cara de rodillo y una cara de bolas  $(1 \ 1 \ 1 \ n_o)$ . Nodo A de la Fig. III.4.3.6.

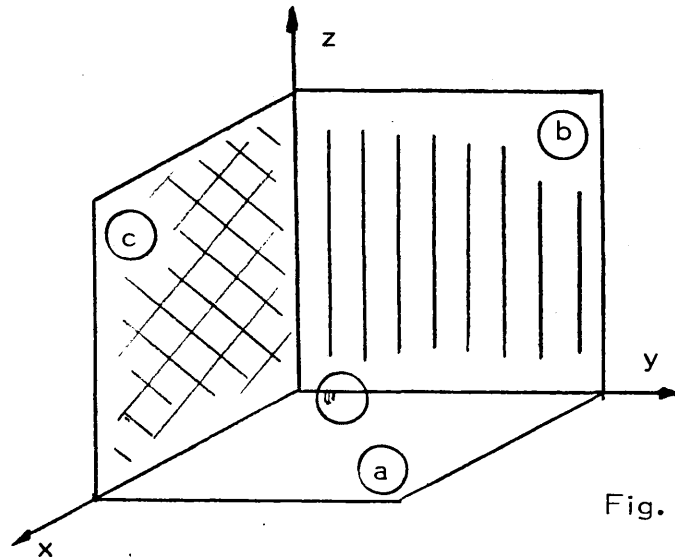


Fig. III.4.3.6

No hay incógnitas en movimiento, y las incógnitas en tensión se tratan de manera idéntica al caso anterior 3, omitiendo la información de la cara de bolas.

5.- Una cara de bolas y dos caras de rodillo perpendiculares a la arista común y paralela a la cara de bolas, estando el resto de las caras libres (0 2 1  $n_o$ )  
Nodo A de la Fig. III.4.3.7

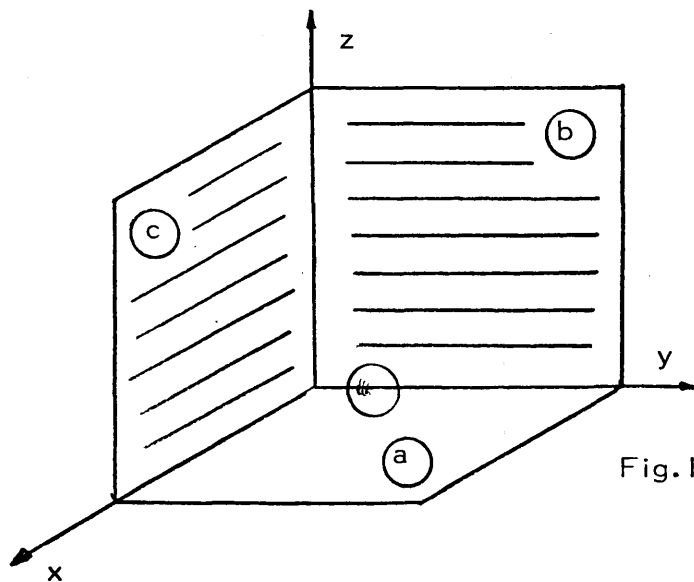


Fig. III.4.3.7

Las caraa de rodillos son perpendiculares a la de bola. No existen incógnitas en movimiento y sí cinco incógnitas en tensión. No es posible aplicar la relación de Cauchy ; para reducir a tres el número de variables. Por ello, se hace la hipótesis de que la arista común a las caras de rodillo (dirección  $z$  en la Fig.) es una dirección principal. Las otras dos direcciones principales se eligen en el plano normal a dicha dirección.

6.- Dos caras empotradas y una cara de rodillos o de bolas, estando el resto de las caras libres ( $2 \ 1 \ 0 \ n_o$ ) ó ( $2 \ 0 \ 1 \ n_o$ ). Nodo A de las Fig. III.4.2.8 y III.4.3.9. respectivamente.

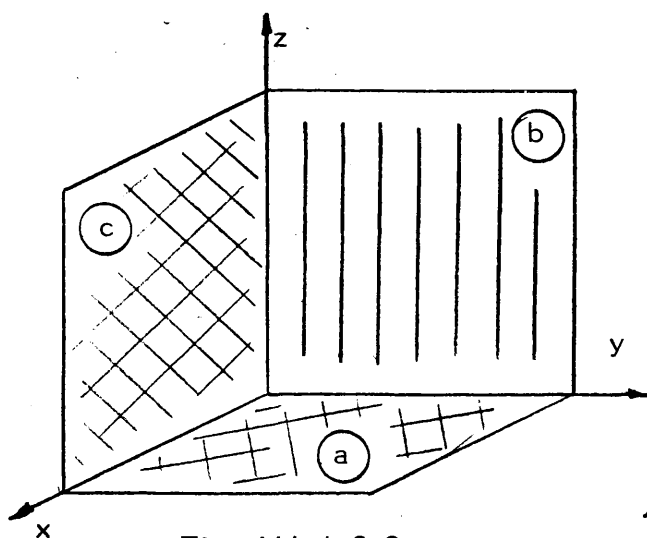


Fig. III.4.3.8

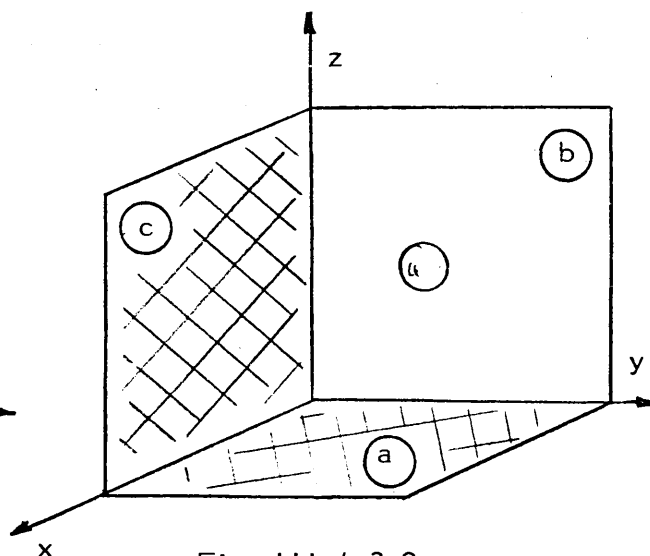


Fig. III.4.3.9

En estos casos, no hay incógnitas en movimientos y puesto que hay dos caras empotradas, se puede conocer la evolución de los movimientos en 3 direcciones linealmente independientes (sin tomar en cuenta el rodillo o la bola), por lo que la resolución es similar a la del caso 1 de aplicación de tensiones principales.

7.- Existe una cara empotrada y dos caras de rodillo estando el resto de

las caras libres  $(1 \ 2 \ 0 \ n_o)$ .

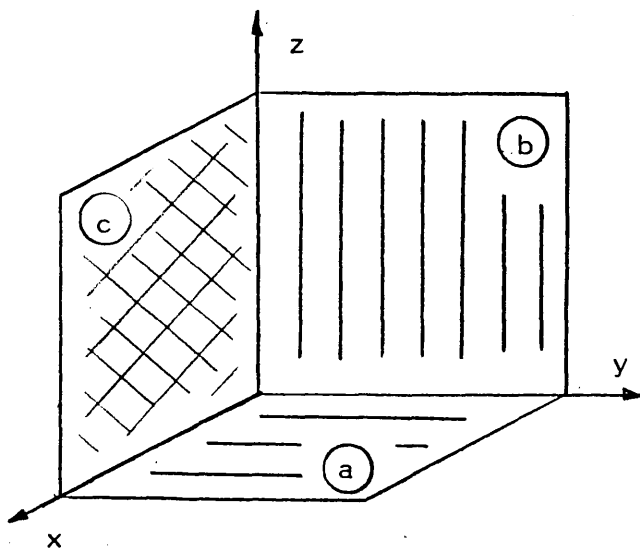


Fig. III.4.3.10

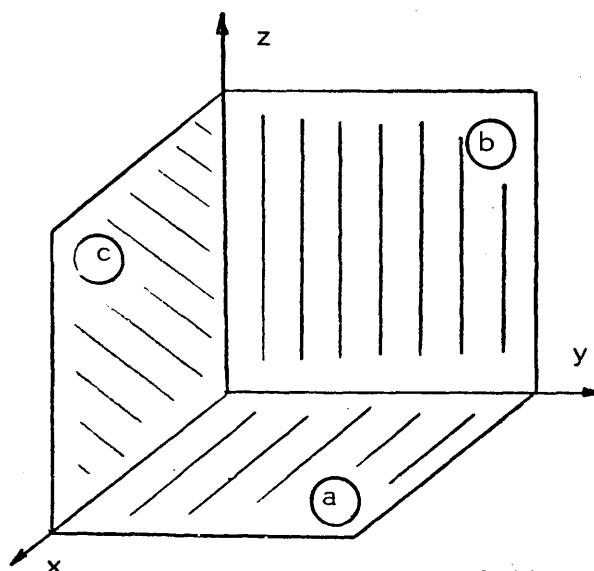


Fig. III.4.3.11

No existen evidentemente incógnitas en movimiento y las relaciones de Cauchy no son suficientes como para reducir el número de incógnitas. Aplicamos el concepto de tensión principal, y aunque los dos rodillos permitirían encontrar la evolución exacta en una dirección que completaría las dos de la cara empotrada Fig. III.4.3.10, en otros casos, esto no resultaría posible Fig. III.4.3.11.

Por tanto, se toma para cualquier nodo de esta situación la cara empotrada y una de las de rodillo, sustituyendo la evolución de movimiento en la dirección des conocida por la de tensiones tangenciales, al igual que se ha hecho con anterioridad en los casos de una cara empotrada y una de rodillos.

8.- Cualquier combinación de caras  $n_3 \ n_2 \ n_1 \ n_o$  que cumpla:

$$n_3 + n_2 + n_1 \geq 4$$

Se toma  $\epsilon = 0$  por lo que se aplica tensiones principales con:

$$v_I = \bar{i} \qquad v_{II} = \bar{j} \qquad v_{III} = \bar{k}$$

Esta hipótesis es razonable, ya que la variación de los distintos movimientos en tres direcciones es presumiblemente nula.

Como se ha visto, el planteamiento de condiciones de contorno, es engorroso y podríamos decir que lleno de aproximaciones. Sin embargo, y evidentemente, es la única manera de conseguir un sistema compatible de ecuaciones lineales.

Por otro lado, en lo que a la aproximación se refiere, hemos de decir, que no es tanta por dos razones fundamentales. Primera el hecho de que se han tomado en general, y salvo muy contados casos, aproximaciones no solo razonables, sino en la mayoría de los casos exactas, y en segundo lugar, este efecto es muy localizado en el nudo tratado en esa forma, por lo que una mejora en la discretización hace practicamente desaparecer estos efectos, a partir de distancias muy cercanas a la situación inicial del nudo.

Esta afirmación ha sido demostrada fehacientemente no sólo en el caso bidimensional, sino también en el tridimensional (Lachat) con aproximaciones mucho más burdas e inexactas que las que aquí se han llevado a cabo.

### III.5.- RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

La solución de los problemas planteados a través del B.I.E.M. tiene dos factores preponderantes en cuanto al coste, que son la integración y la resolución del sistema de ecuaciones resultante. Es por ello por lo que es necesario cuidar especialmente el tratamiento de dichos procesos.

En lo que se refiere a la integración se ha implementado un método óptimo, siguiendo los esquemas de una cuadratura de Gauss adaptativa (III.2). En cuanto al sistema de ecuaciones, posee algunas características específicas, que pueden ser explotadas para conseguir una adecuación óptima del método de resolución al problema propuesto.

Como se ha desarrollado en el apartado III.3, en el caso de utilizar un método de subregionalización, la matriz podrá ser dividida en diversos grupos, que abarcan un número variable, pero conocido de columnas. Estos grupos poseerán una configuración definida, como se vió en III.3 y dentro de ellas las columnas tendrán en idéntica posición los elementos iguales a cero. Así pues, cada grupo podría ser dividido en diversos bloques de coeficientes distintos de cero.

Por otro lado por cuestiones propias del método, la diagonal presentará una franja de términos distintos de cero, y por supuesto en general no será simétrica. En definitiva nos encontramos ante una matriz dispersa con muchos términos iguales a cero en situación perfectamente conocida.

Se presenta pues la posibilidad, dadas las grandes dimensiones previstas para el sistema, de no almacenar dichos elementos nulos, para aprovechar al máximo el dispositivo de almacenamiento. Esta posibilidad descarta inicialmente los métodos de

eliminación que necesitan de memoria auxiliar para almacenamiento de los ceros, que posteriormente dejarán de serlo.

Otro inconveniente adicional consiste en el hecho de que la integración se realiza de forma que se van consiguiendo columnas de la matriz, por lo cual se necesitaría un proceso inicial para almacenar la matriz por filas que es como se necesitaría en la resolución. Ello conlleva un tiempo adicional de cálculo.

Existen otras dos causas adicionales que favorecen la decisión en favor de un método iterativo. La primera estriba en el hecho de la posibilidad de extensión del proceso al campo plástico, lo que significa el establecimiento de un procedimiento incremental (vease IV.2) que permite el partir de un vector inicial de iteración, el correspondiente al incremento anterior, muy próximo al real y que por tanto aumenta la rapidez en la convergencia.

La segunda causa es prácticamente idéntica a la anterior pero en el caso de elasticidad, ya que en general es posible partir de un vector inicial parecido al real, aumentando en mucho la convergencia. El cálculo de este vector inicial se explica en III.5.2.

Centrándonos ya en los métodos iterativos diremos que los métodos de Gauss - Seidel, Southwell ó Jacobi necesitan, para su convergencia que la matriz del sistema sea simétrica y definida positiva. Sin embargo una transformación del tipo  $S = A^T A$  no sería posible, pues destruiríamos la estructura del sistema. Tampoco nos es posible una adaptación tal que nos permita una realización interna del producto  $A^T A$ . Así pues, resultan imposibles.

El método en definitiva que se ha desarrollado es el método del gradiente con



jugado, pues aunque la matriz del sistema debe de ser simétrica y definida positiva, podemos realizar las secuencias propias del método sin efectuar la multiplicación de  $A^T \cdot A$ , como se verá en III.5.2.

Frente a este método el correspondiente al gradiente descendente no presenta ninguna ventaja, ya que no es más que una versión no perfeccionada del mismo, y el del gradiente conjugado modificado tampoco es posible pues necesita una matriz  $K^{-1}$ , aproximación de la  $S^{-1} = (A^T \cdot A)^{-1}$ , matriz que no es conocida, necesitando-se un número mayor de operaciones.

El método del gradiente conjugado fue introducido en 1952 por Hestenes y Steifel, para resolver sistemas de ecuaciones lineales

$$A x = b$$

III.5.1

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  simétrica y definida positiva. Este método tiene como propiedades particulares el que, en ausencia de errores de redondeo, se obtiene la solución en  $n$  iteraciones como máximo, y otra muy importante en nuestro caso, el hecho de que la matriz no necesita encontrarse en memoria, en cada iteración, siendo tan sólo necesario calcular el producto de  $A$  por un vector  $z$  particular.

Otra serie de propiedades importantes del método son, el que no requiere una estimación previa de parámetros, aprovecha la distribución de los autovalores del operador de iteración, y sobre todo requiere muy pocas restricciones en la matriz  $A$  para un comportamiento óptimo.

En definitiva, estas son las principales razones que han justificado la elección, que está ampliamente refrendada por distintos autores (Gambolatti, Reid, Concus, Jernings, etc).

### III.5.1.- EL METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, se encuadran dentro del marco más general de los métodos aproximados de resolución de ecuaciones del tipo,

$$A x = b$$

III.5.1.1

donde  $x \in X$ ,  $b \in Y$  y  $A$  es un operador lineal, definido en el espacio  $X$ ,  $A \in L(X)$ .

Estos métodos tratan de obtener una solución  $x^n \in X^n$  aproximada a la solución real  $x^*$ , de forma que algún funcional de error sea mínimo, ó bien las componentes del vector  $A x^n$  y del vector  $b^n \in Y^n$ , en un cierto espacio de proyección sean las mismas (métodos proyectivos).

La filosofía de los métodos iterativos, si bien parte de estas premisas es algo diferente, ya que van consiguiendo una secuencia de este tipo de soluciones aproximadas en la forma anterior, cuyo límite coincide con la solución real. Podemos pues decir que un método iterativo es un método aproximado aplicado un cierto número de veces, por lo que muy brevemente recordaremos la base de un método aproximado que ya se vió en el capítulo I.

En un método aproximado existen tres pasos fundamentales:

- Elección del espacio  $X^n$  y del espacio  $Y^n$ , que en la mayor parte de los problemas coinciden.

- Elección del espacio  $V$  de proyección.

- Definición del funcional a minimizar, ó bien del método de proyección en orden a igualar las componentes en  $V$  de  $Ax^n$  y de  $b^n$ .

Los tres espacios  $X^n$ ,  $Y^n$  y  $V$  vienen definidos fundamentalmente por su dimensión y una base de vectores, mientras que el método de proyección coincide normalmente con el producto escalar particular definido en el espacio de trabajo  $X$ , ya que  $X^n$ ,  $V \subset X$ , y tienen la topología inducida por  $X$ .

Así, en el caso particular de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas  $X = Y = \mathbb{R}^n$ , y el producto escalar es el normal entre vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

El espacio aproximante  $X^n$  depende del método elegido, así como el espacio de proyección, que suele ser un subespacio de  $X^n$ . En este caso particular de que  $V \subset X^n$ , podremos plantear el problema en la forma siguiente (métodos de Bubnov - Galerkin).

Sea  $u_i$   $i = 1, 2, \dots, l$  una base de  $X^n$  y  $u_j$   $j = 1, 2, \dots, m$   $m \leq l$  la base correspondiente a  $V$ .

La base aproximada  $X^n$  podrá expresarse como

$$x^n = a_i u_i \quad \text{III.5.1.2}$$

tal como hemos dicho anteriormente, supuesto conocido  $b^n$ , el problema puede plantearse igualando las componentes sobre  $V$  de  $Ax^n$  y de  $b^n$  en la forma

$$(Ax^n, u_j) = a_i (A u_i, u_j) = (b^n, u_j) \quad \text{III.5.1.3}$$

donde el paréntesis significa producto escalar, y se ha hecho uso de III.5.1.2 y del hecho de que  $A$  es lineal; La ecuación III.5.1.3 representa un sistema de  $m$  ecuaciones. Así, en el caso de  $l = m$  podran determinarse las  $a_i$  en el sistema anterior, supuesto conocido  $b^n$  y evidentemente las  $u_i$ . Sin embargo, en los métodos iterativos - se sigue otra táctica. Se suponen conocidas  $l - m$   $a_i$  y se van variando todos ó algunos de los  $l - m$  vectores asociados a estas constantes. En algunos métodos se modifican los  $m$  vectores de la base de  $V$  en cada iteración con el objeto de acelerar la convergencia (métodos no estacionarios).

Haciendo un inciso hemos de decir que el procedimiento anterior es equivalente en el caso de matrices  $A$  simétricas y definidas positivas a la minimización del funcional de Ritz (vease [ 59 ] ).

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad \text{III.5.2.4}$$

obteniendose en cada solución vectores  $x_i$  tales que

$$Q(x_{i+1}) < Q(x_i) \quad \text{III.5.1.5}$$

Centrandonos ya en el método del gradiente conjugado, hemos de definir los espacios  $X^n$ ,  $V$  e  $Y^n$ , y aplicar el método propuesto. A partir de ahora, y sin pérdida de generalidad consideraremos simétrica a la matriz  $A$  ya que en caso iterativo + una simple premultiplicación del sistema por  $A^T$  permitirá tratarlo de esta forma.

El espacio  $X^n$  de aproximación es una variedad lineal de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión tres, cuyos vectores base son: El vector aproximado en la iteración anterior  $x_i$ , el vector residuo en dicha iteración  $r_i$  definido como

$$r_i = b - Ax_i \quad \text{III.5.1.6}$$

y un tercer vector que corresponde a la diferencia entre las dos últimas aproximaciones por un cierto escalar  $\lambda$  que posteriormente calcularemos

$$v_{i-1} = (x_i - x_{i-1}) \quad \text{III.5.1.7}$$

En definitiva es posible expresar el vector solución en la iteración  $i+1$  como

$$x_{i+1} = a_{\lambda}^0 x_i + a_i^1 r_i + a_i^2 v_{i-1} \quad \text{III.5.1.8}$$

El espacio de proyección se escoge precisamente el formado por  $r_i$  y  $v_{i-1}$ , y  $a^0$  se supone igual a 1. Se observa en definitiva que evidentemente como dijimos  $x_i$  va variando en orden a conseguir la solución real, pero en el caso particular de este método todo también cambian los vectores base del espacio proyección. Es pues un método no estacionario. El hecho de que  $r_i$  y  $v_{i-1}$  son linealmente independientes en cada iteración y por tanto generan una variedad de dimensión dos es inmediato, y se demuestra más adelante. Por último el vector  $b^n$  se escoge igual a  $b$ , es decir que el último valor que se consiga de  $x^n$ , si la sucesión  $(x_i)$  es convergente sería la solución real. Planteemos pues el problema según III.5.1.3.

Igualando las componentes de  $Ax_{i+1}$  y de  $b$  respecto a  $r_i$  y  $v_{i-1}$  tendremos el sistema de dos ecuaciones

$$r_i^T Ax_i + r_i^T A a_i^1 r_i + r_i^T A a_i^2 v_{i-1} = r_i^T b$$

$$v_{i-1}^T Ax_i + v_{i-1}^T A a_i^1 r_i + v_{i-1}^T A a_i^2 v_{i-1} = v_{i-1}^T b$$

y teniendo en cuenta III.5.1.5, y disponiendolo en forma matricial podemos escribir

$$\begin{bmatrix} r_i^T A r_i & r_i^T A v_{i-1} \\ v_{i-1}^T A r_i & v_{i-1}^T A v_{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i^T r_i \\ v_{i-1}^T r_i \end{Bmatrix} \quad \text{III.5.1.9}$$

Resolviendo para  $a_i^1$  y  $a_i^2$  se obtiene:

$$a_i^1 = \frac{v_i^T r_i}{v_i^T A v_i}$$

$$\beta_i = - \frac{v_{i-1}^T A r_i}{v_{i-1}^T A v_{i-1}}, \text{ con} \quad \text{III.5.1.10}$$

$$\beta_i = - \frac{a_i^2}{a_i^1}$$

y habiendo tomado la variable  $\lambda$  de III.5.1.7 el valor  $1/a_{i-1}^1$ . A partir de las expresiones III.5.1.6 y III.5.1.7, e introduciendo el valor de  $a_{i-1}^1$  que se puede deducir de III.5.1.10 se puede, finalmente demostrar la ortogonalidad de  $v_{i-1}$  y  $r_i$ :

$$v_{i-1}^T r_i = 0 \quad \text{III.5.1.11}$$

(Un desarrollo completo de lo anterior puede encontrarse en [71])

Como resumen, un proceso de cálculo de la iteración  $i$  supuesto conocido  $x_i$  y  $r_i$  es como sigue, hasta la obtención de  $x_{i+1}$  y  $r_{i+1}$ .

- Se calcula el valor de  $\beta_i = - \frac{v_{i-1}^T A r_i}{v_{i-1}^T A v_{i-1}}$

- Se calcula  $v_i = r_i + \beta_i v_{i-1}$

III.5.1.12

- Se calcula  $a_i^1 = \alpha = \frac{v_i^T r_i}{v_i^T A v_i}$

y ya se puede calcular  $x_{i+1}$  y  $r_{i+1}$

$$x_{i+1} = x_i + a_i^1 v_i$$

III.5.1.13

$$r_{i+1} = r_i - a_i^1 A v_i$$

### III.5.2.- ASPECTOS COMPUTACIONALES

La implementación del Método en el ordenador para la resolución del sistema de ecuaciones a que conduce el Método de los elementos de Contorno, cuyas características ya se han analizado, presenta dos aspectos importantes que es necesario estudiar.

El primero se refiere a la elección efectiva de la secuencia de operaciones en una iteración, de la cual hemos dado anteriormente la secuencia base. El segundo se refiere a la elección del vector inicial para la primera iteración.

En cuanto al primer aspecto, hay que tener en cuenta que la secuencia desarrollada en III.5.1 es válida para el caso de que la matriz  $A$  sea simétrica. Puesto que el M.E.C. da lugar a matrices no simétricas, una primera posibilidad sería premultiplicar el sistema  $Ax = b$  por  $A^T$ .

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b \quad \text{III.5.2.1}$$

donde  $A^T \cdot A$  sería simétrica y supuesta definida positiva. Una vez realizada esta transformación podríamos aplicar la secuencia anteriormente desarrollada. Ahora bien, el producto  $A^T \cdot A$  sobre todo cuando el problema sea de grandes dimensiones puede resultar muy laborioso, por lo que vamos a intentar introducir este producto dentro de la secuencia de operaciones de cada iteración.

Antes de plantear esta opción, podemos reflexionar sobre la secuencia planteada en III.5.1.12 puesto que no resulta ser la más idónea para aplicar el cálculo numérico. En efecto, puede verse que en cada iteración se realizan dos productos de matriz por vector:  $A \cdot v_i$  y  $A \cdot r_i$ . Para reducir estas operaciones hacemos:



$$v_{i-1}^T A \cdot v_{i-1} = \frac{v_{i-1}^T r_{i-1}}{\alpha_{i-1}}$$

Sustituyendo en  $\beta_i$ :

$$\beta_i = - \frac{\alpha_{i-1} v_{i-1}^T A r_i}{v_{i-1}^T r_{i-1}} = - \frac{\alpha_{i-1} r_i^T A v_{i-1}}{v_{i-1}^T r_{i-1}}$$

como

$$-\alpha_{i-1} A v_{i-1} = r_i - r_{i-1}$$

se tiene para  $\beta_i$

$$\beta_i = \frac{r_i^T (r_i - r_{i-1})}{v_{i-1}^T r_{i-1}}$$

Puede demostrarse que

$$r_i^T r_{i-1} = 0$$

$$v_{i-1}^T r_{i-1} = r_{i-1}^T r_{i-1}$$

con lo cual,  $\beta_i$  queda:

$$\beta_i = \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}}$$

Por tanto la secuencia ahora queda en la forma

$$\beta_i = \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}}$$

$$v_i = r_i + \beta_i v_{i-1}$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{v_i^T A v_i}$$

III.5.2.2

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i v_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A v_i$$

En esta secuencia se observa que sólo se efectúa en cada iteración el producto de una matriz por un vector:  $A v_i$ . Si ahora en la III.5.2.2, para el caso de  $A$  no simétrica, sustituimos  $A$  por  $E$  con:

$$E = A^T A$$

III.5.2.3

la secuencia de operaciones queda en la forma:

$$\beta_i = \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}}$$

$$v_i = r_i + \beta_i v_{i-1}$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T r_i}{v_i^T A^T A v_i}$$

III.5.2.4

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i v_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A^T A v_i$$

Con esta secuencia no es preciso hacer ninguna operación previa y en cada iteración será preciso hacer dos productos de matriz por vector.

$$A v_i \quad \text{y} \quad A^T (A v_i)$$

Por tanto la secuencia III.5.2.4 será más eficiente que la III.5.2.2, haciendo previamente la transformación III.5.2.3, siempre que el número de iteraciones sea menor que el tamaño del sistema de ecuaciones. Se ha elegido la secuencia III.5.2.4 y en la justificación de esta decisión podemos hacer las siguientes consideraciones. El método del gradiente conjugado converge teóricamente para el número de iteraciones menor que el número de ecuaciones. Sólo los errores numéricos pueden hacer que el número de iteraciones preciso para alcanzar la solución final sea mayor que el número de ecuaciones.

- El método del gradiente conjugado es favorable en número de operaciones - frente a los métodos de eliminación, cuando el número de iteraciones necesarias es - menor que  $n/3$  ( $n$  = número de ecuaciones) por tanto la decisión anterior es congruente con la elección del método.

- Con el empleo de memoria auxiliar (lo que es necesario para grandes siste- mas de ecuaciones para los que está pensado el programa) el método del gradiente - conjugado resulta más sistemático en los accesos a dicha memoria lo que puede hacerlo aún más favorable frente a los métodos de eliminación.

- La otra opción de realizar el producto  $A^T A$  tiene inconvenientes operativos ya que sería preciso disponer de almacenamiento auxiliar para efectuar el producto.

En cuanto al segundo aspecto de la implementación a que antes nos referíamos la elección del vector inicial, es evidente que resulta de capital importancia para conseguir una mayor convergencia del algoritmo. Diferentes opciones, que pasamos a discutir a continuación, pueden plantearse.

- Elección del vector nulo como vector inicial.

Las ventajas de esta elección son evidentes: sencillez de elaboración y evita- ción de realizar la primera iteración. Los inconvenientes se centran en que el número de iteraciones que se ahorra por la aproximación del vector utilizado al real es imprevisible.

- Elección del vector resultante de dividir los términos independientes entre= los elementos de la diagonal principal como vector inicial.

La principal ventaja de este sistema es que produce un ahorro de un 4 a un 5% en el número de iteraciones. Asimismo la obtención del vector es muy directa, pero sin embargo cuando no se trabaja en memoria principal (y éste es el caso), la accesibilidad de los valores de la diagonal principal, puede resultar muy complicada. Por las especiales características de la obtención de la matriz del sistema en el Método de los Elementos de Contorno resulta sin embargo inmediata la obtención de estos valores al final del proceso de montaje por lo que este sistema no presenta serios inconvenientes, si bien puesto que la matriz no es monodigonalmente dominante, la aproximación que se consigue no es muy buena.

- Precisamente para obviar esta limitación se ha considerado una tercera posibilidad que es la de tomar como vector inicial, la solución de un sistema de ecuaciones reducido formado por cajas solapadas según se indica en la Fig. III.5.2.1, incluyendo en dicho sistema las subdiagonales que condicionan la dominancia en la matriz.

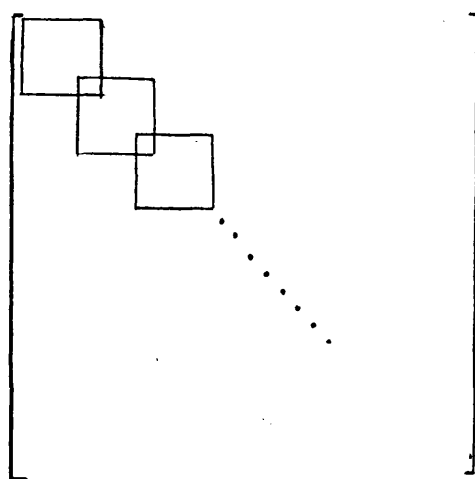


Fig. III.5.2.1

Con este método puede llegarse a ahorrar hasta un 8% de iteraciones, pero - puede verse ampliamente reducida esta ventaja por la pérdida de tiempo en la búsqueda inicial de los datos del sistema de ecuaciones reducido en el almacenamiento auxiliar.

#### IV.1.- INTRODUCCION

El análisis tensional de cuerpos axisimétricos sometidos a cargas y desplazamientos en el contorno, es de obvio interés en muchas aplicaciones industriales.- El estudio de depósitos, vasijas de todo tipo, y más recientemente de vasijas de reactores nucleares, que en muchos casos toman la forma axisimétrica, ha hecho de la resolución de este caso algo frecuente en el calculo de estructuras en los últimos años.

Es bien conocido, que el tratamiento axisimétrico de problemas, permite reducir en un grado la dimensión del problema, así en elementos finitos la resolución de un caso tridimensional axisimétrico podría hacerse empleando solo una malla bidimensional. En el método de los elementos de contorno sería pues necesaria tan solo una malla monodimensional, para la resolución del mismo problema, con la minimización de costo que ello supone.

Surge pues, la posibilidad de la consideración de la simetría axial en el método propuesto, para su resolución numérica debido a las ventajas, ya aducidas que presenta frente a los demás.

#### IV.2.- FORMULACION

Como en el caso tridimensional, ya estudiado, para realizar la formulación del método para cuerpos de simetría axial es preciso partir de la identidad de Somigliana II.1.1 para la definición de movimientos, y de la ecuación II.3.8 para la definición de las tensiones. La diferencia lógicamente consiste en la diferente solución fundamental a utilizar, soluciones que se calcularon en I.7.

Otra diferencia, con el caso anterior, estriba en el hecho de que no es posible conseguir unas definiciones simples de los tensores característicos en forma tensorial, siendo necesario el emplear una notación desarrollada que complica el manejo, y sobre todo la presentación de los resultados.

La utilización profusa de las funciones de Legendre que entran a formar parte de la formulación hace necesario el establecer un breve recordatorio de las principales propiedades de estas funciones, o al menos las que más interesan en el desarrollo. Este resumen se presenta en el Apendice II.

Para terminar diremos que el hecho de utilizar una gran cantidad de derivadas intermedias para el cálculo de los tensores hace que, por mor de la claridad, éstas se presenten en apéndices sucesivos.



#### IV.2.1.- MOVIMIENTOS EN PUNTOS INTERNOS

Ya se ha indicado que la ecuación que define los movimientos es la ecuación= ó identidad de Somigliana, que repetiremos por comodidad.

$$\delta_{ki} U_i = \int_{\delta \Omega} U_{ik} t_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y \quad \text{IV.2.1.1}$$

En este caso, sin embargo, no se ha calculado ninguno de los tensores fundamentales que aparecen en ella, ya que en 1.7 sólo se dedujo el tensor de Galerkin, - mientras que los tensores  $U_{ik}$ , y  $T_{ik}$  aparecen como consecuencia de la aplicación - de operadores elásticos diferenciales a este vector.

Recordando que, según la dirección k en la que se aplicaba la carga puntual, el vector de Galerkin tenía una expresión distinta, podemos escribir

$$k = r \quad \underline{x} = \begin{Bmatrix} x_r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad k = z \quad \underline{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_z \end{Bmatrix} \quad \text{IV.2.1.2}$$

Es posible agrupar estos dos valores en un sólo tensor  $x_{ik}$ , donde "k" de nuevo representa la dirección de la carga puntual, e "i" cada una de las componentes del vector. De esta forma

$$x_{ik} = \begin{bmatrix} x_{rr} & x_{rz} \\ x_{zr} & x_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r & 0 \\ 0 & x_z \end{bmatrix} \quad \text{IV.2.1.3}$$

Las expresiones de  $x_r$  y  $x_z$  se obtuvieron en 1.7, en la forma

$$x_r = -\frac{1}{8\pi G} Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} Q_{\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma) \quad \text{IV.2.1.4}$$

EL CASO AXISIMETRICO IV.2

$$\chi_z = \frac{1}{8\pi^2 G} Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} Q_{-\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma) \quad \text{IV.2.1.4}$$

donde  $Q_{\frac{1}{2}}^{-1}$  y  $Q_{-\frac{1}{2}}^{-1}$  son funciones de Legendre de segunda especie, G es el m'odulo de rigidez, R es la distancia del eje de simetría al anillo x donde se encuentra la carga concentrada, r es la misma distancia pero respecto al anillo de campo y, y por último  $\gamma$  es la variable de las funciones de Legendre, que en este caso tiene la expresión

$$\gamma = 1 + \frac{(R-r)^2 + (Z-z)^2}{2Rr} \quad \text{IV.2.1.5}$$

donde Z, y z tienen el mismo significado que R y r en lo que se refiere a la coordena da z (vease Fig.IV.2.7.1).

En la mayoria de las ocasiones, sin embargo, se prefiere utilizar las funciones de Legendre de orden cero, en vez de las de orden - 1. Utilizando la expresión (A2. 2) del ap'endice es posible pasar de unas a otras quedando en definitiva.

$$\chi_r = \frac{1}{8\pi^2 G} Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} \left[ -\frac{4}{3} \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) \right]$$

$$\chi_z = \frac{1}{8\pi^2 G} Rr \sqrt{\gamma^2 - 1} \left[ -4 \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \right]$$

y operando

$$\chi_r = \frac{1}{12\pi^2 G} Rr (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) \quad \text{IV.2.1.6}$$

$$\chi_z = \frac{1}{12\pi G} R r_r (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \quad \text{IV.2.1.6}$$

El tensor de Galerkin corresponde precisamente a la solución del problema de Kelvin en coordenadas polares. Los movimientos de ese mismo problema corresponden precisamente al tensor  $U_{ik}$ , por lo que será necesario obtener éstos en función de aquél.

Las expresiones de los movimientos en función del tensor de Galerkin vienen definidas en el apéndice 1 (A1.10), en forma tensorial. Desarrollandolas en coordenadas polares, se puede obtener:

$$\begin{aligned} 2(1-\nu) U_{rr} &= (1-2\nu) \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \chi_r + \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial r^2} \\ 2(1-\nu) U_{zr} &= - \left( \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_r}{\partial z} \right) \\ 2(1-\nu) U_{rz} &= - \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial r \partial z} \\ 2(1-\nu) U_{zz} &= \nabla^2 \chi_z + \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_z}{\partial r} \end{aligned} \quad \text{IV.2.1.7}$$

Si ahora recordamos el valor de  $\nabla^2$  en polares, para el caso axisimétrico

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y calculamos las derivadas primeras y segundas del vector de Galerkin que vienen - definidas en las ecuaciones AII.2 a AII.3 del Apéndice II, se pueden obtener - las expresiones finales para los elementos del tensor  $U_{ik}$ .

$$U_{rr} = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

$$U_{zr} = \frac{Z-z}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} - \left( \gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

IV.2.1.8

$$U_{rz} = \frac{-(Z-z)}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} + \left( \gamma - \frac{r}{R} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

$$U_{zz} = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\gamma) Q_{-\frac{1}{2}} - \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

El cálculo del tensor  $T_{ik}$  requiere la aplicación de los operadores elásticos= al tensor de movimientos  $U_{ik}$ , anteriormente calculado, tal como se hizo en el caso - tridimensional. Sin embargo, la expresión varía de la dada en II.2.3 ya que hay - que definirlo en coordenadas cilíndricas. Expresándolo en esta forma se tiene, que - el tensor tensión en un punto del interior del dominio como consecuencia de una car- ga puntual en el espacio infinito y en coordenadas cilíndricas sería:

$$\Sigma_{rrr} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{r} U_{rr} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} \right) \right]$$

IV.2.1.9

$$\Sigma_{zrr} = \Sigma_{rzz} = G \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right)$$

$$\Sigma_{zzr} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{r} U_{rr} + \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta\theta r} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{U_{rr}}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta rr} = \Sigma_{r\theta r} = \Sigma_{\theta zr} = \Sigma_{z\theta r} = 0$$

$$\Sigma_{rrz} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{r} U_{rz} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \right) \right]$$

IV.2.1.9

$$\Sigma_{rzz} = \Sigma_{zrz} = G \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right)$$

$$\Sigma_{zzz} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{r} U_{rz} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta\theta z} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{U_{rz}}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta rz} = \Sigma_{r\theta z} = \Sigma_{\theta zz} = \Sigma_{z\theta z} = 0$$

y por tanto, para el tensor  $T_{ik}$  se tienen aplicando la ecuación A1.2 de equilibrio en el contorno, las siguientes expresiones

$$T_{rr} = \Sigma_{rrr} n_r + \Sigma_{rzz} n_z$$

IV.2.1.10

$$T_{zr} = \Sigma_{rzz} n_r + \Sigma_{zzz} n_z$$

$$T_{\theta r} = 0$$

$$T_{rz} = \sum_{rrz} n_r + \sum_{rzz} n_z$$

IV.2.1.10

$$T_{zz} = \sum_{rzz} n_r + \sum_{zzz} n_z$$

$$T_{\theta z} = 0$$

Las derivadas de los movimientos necesarias para el cálculo de las tensiones anteriores vienen definidas en el cuarto apartado del apéndice II, siendo preferible, debido a la complicación operativa que presenta el cálculo de los tensores, el dejarlos en función de dichas derivadas, y no seguir desarrollando.

Podemos plantearnos ahora la pregunta de, si al igual que ocurría en el caso tridimensional, las integrales de volumen son singulares. La respuesta es afirmativa

Debido a la naturaleza de la solución fundamental, existe también una singularidad intrínseca en el anillo de aplicación de las cargas R, Z.

Efectivamente, en el punto  $\underline{x}$ , es decir  $(r, z) \equiv (R, Z)$ , y recordando el valor  $\gamma$  definido en IV.2.1.5, se tiene que  $\gamma = 1$ , valor para el cual las funciones de Legendre de segunda especie son singulares.

Es necesario pues, el extender la ecuación de Somigliana a un dominio  $\Omega_\epsilon$ , como en el caso tridimensional, entendiendo las integrales de volumen de la ecuación IV.2.1.1 en el sentido del valor principal de Cauchy, para lo cual es necesario demostrar que estas existen.

Esta demostración es simple si consideramos las aproximaciones de las funciones de Legendre cuando  $\gamma$  tiende a uno.

Las funciones de Legendre de segunda especie (vease Erdelyi, [ 46 ] ) toman para  $\gamma \rightarrow 1$  una expresión asintótica logarítmica, en la forma

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) = -\frac{1}{2} \ln \frac{(\gamma-1)}{32}$$

IV.2.1.11

$$Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) = -\frac{1}{2} \ln \frac{(\gamma-1)}{32} - 2$$

Con lo que las derivadas en ese punto serán

$$\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} = -\frac{1}{2(\gamma-1)}$$

IV.2.1.12

Sustituyendo estas expresiones en el valor de  $U_{ik}$  es posible deducir el orden de singularidad buscado.

Observando la (Fig IV.2.1.1) y recordando la expresión de  $\gamma$  , se tiene

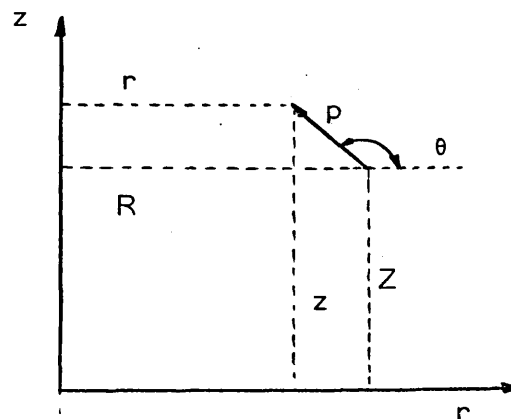


Fig.IV.2.1.1

$$\gamma - 1 = \frac{(R-r)^2 + (Z-z)^2}{2Rr} = \frac{p^2}{2Rr}$$

$$\ln(\gamma - 1) = 2 \ln \frac{p}{2Rr} \equiv O(\ln p)$$

Por otro lado  $d\Omega_y = 2\pi r p d\theta dp$  es decir  $d\Omega_y$  es  $O(p)$ , y por último  $U_{ik}$  es función directa de las funciones de Legendre, que son  $O(\ln(\gamma - 1))$ , con lo que  $U_{ik}$  lo será también, o lo que es igual  $O(\ln p)$ . Con ello la singularidad de la integral de volumen de nuevo es del tipo débil, existiendo en el sentido de Cauchy.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(x)} U_{ik} X_i d\Omega_y = X_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_\epsilon(x)} U_{ik} d\Omega_y = 0 \quad \text{IV.2.1.13}$$

En consecuencia, y al igual que ocurría en el caso tridimensional, los valores principales de Cauchy de las integrales de volumen existen, por lo que haciendo de nuevo el cambio, la ecuación fundamental de movimientos en puntos internos queda de nuevo idéntica a la IV.2.1.1 habiéndose definido las expresiones de  $U_{ik}$ ,  $T_{ik}$  en IV.2.1.8 y IV.2.1.10. La demostración de que las integrales

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} T_{ik} u_i ds_y, \quad \int_{\partial B_\epsilon(x)} U_{ik} t_i ds_y$$

son nulas, donde ahora  $B_\epsilon(x)$  es la superficie de un toro de radio de la sección  $\epsilon$  y -circunferencia central en el anillo  $RZ$ , es análoga al caso tridimensional y se calcula en IV.2.3.



#### IV.2.2.- TENSIONES EN PUNTOS INTERNOS

La expresión de la derivada de los movimientos de un punto interno después de aplicar el concepto de Mikhlin de derivadas de integrales singulares venia definida en 11.3.4 y era la siguiente

$$\delta_{ki} u_{i;m} = \int_{\delta\Omega} U_{ik;m} t_i ds_y - \int_{\delta\Omega} T_{ik;m} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik;m} X_i d\Omega_y - X_i(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_\epsilon(x)} U_{ik} p_{,m} ds_y \quad \text{IV.2.2.1}$$

donde de nuevo el ";" representa derivada respecto al punto donde se centra la singularidad, y la "," respecto al punto de campo.

Es necesario pues en principio calcular esta última integral, que hay que añadir a la otra integral de volumen, integral que como siempre hay que entender en el sentido de Cauchy.

Esta integral es fácilmente calculable, ya que  $U_{ik}$  es de orden  $O(\ln p)$  como se indicó,  $p_{,m}$  es de orden  $O(1)$  y  $ds_y = 2\pi r p d\theta$  es de orden  $O(p)$ , con lo que, de nuevo, el resultado de la integral, es nulo siempre, como es este caso, que  $X_i$  y  $U_{ik}$  sean continuas, y acotadas en  $\Omega$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_\epsilon(x)} U_{ik} p_{,m} ds_y = 0 \quad \text{IV.2.2.2}$$



Si ahora se aplica el operador elástico  $C_e$  en cilíndricas a la ecuación de movimientos internos IV.2.1.1 se vuelve a obtener la expresión II.3.8 que escrita de nuevo queda

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\delta\Omega} D_{ijk} t_k ds_y - \int_{\delta\Omega} S_{ijk} u_k ds_y + \int_{\Omega} D_{ijk} X_k d\Omega_y \quad \text{IV.2.2.3}$$

donde los distintos tensores tienen expresiones análogas al caso tridimensional pero en coordenadas cilíndricas, así aplicando el operador  $C_e$  al tensor  $U_{ik}$  se obtiene el tensor  $D_{ijk}$ , que desarrollado queda

$$\begin{aligned} D_{rrr} &= 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} U_{rr} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} \right) \right] \\ D_{rzz} &= D_{zrr} = G \left( -\frac{\partial U_{rr}}{\partial Z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial R} \right) \\ D_{zzr} &= 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} U_{rr} + \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} \right) \right] \\ D_{\theta\theta r} &= 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{U_{rr}}{R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} \right) \right] \\ D_{\theta rr} &= D_{r\theta r} = D_{\theta zr} = D_{z\theta r} = 0 \\ D_{rrz} &= 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{rz}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} U_{rz} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial Z} \right) \right] \\ D_{rzz} &= D_{zrz} = G \left( -\frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial R} \right) \end{aligned} \quad \text{IV.2.2.4}$$

$$D_{zzz} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial U_{zz}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} U_{rz} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial R} \right) \right]$$

$$D_{\theta\theta z} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{U_{rz}}{R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial U_{rz}}{\partial R} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial Z} \right) \right] \quad \text{IV.2.2.4}$$

$$D_{\theta rz} = D_{r\theta z} = D_{\theta zz} = z_{\theta z} = 0$$

Las derivadas anteriores de los movimientos respecto a R y Z vienen definidas en el apéndice

En cuanto al tensor  $S_{ijk}$  se derivará a partir de un tensor adicional  $\Sigma_{ijkl}$ , que se consigue aplicando el operador elástico al tensor  $\Sigma_{ijk}$  definido en IV.2.1.3, con lo que se tendrá.

$$\Sigma_{rrrr} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} \Sigma_{rrr} + \frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{rzrr} = \Sigma_{zrrr} = G \left( -\frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial Z} + \frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial R} \right)$$

$$\Sigma_{zzrr} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{rrz}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} \Sigma_{rrz} + \frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial R} \right) \right] \quad \text{IV.2.2.5}$$

$$\Sigma_{\theta\theta rr} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\Sigma_{rrr}}{R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial \Sigma_{rrr}}{\partial R} + \frac{\partial \Sigma_{rrz}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{rrzr} = \Sigma_{rrrz} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{rzr}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{1}{R} \Sigma_{rzr} + \frac{\partial \Sigma_{rzz}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{r z r z} = \Sigma_{z r r z} = \Sigma_{z r z r} = \Sigma_{r z z r} = G \left( -\frac{\partial \Sigma_{r z r}}{\partial Z} + \frac{\partial \Sigma_{r z z}}{\partial R} \right)$$

$$\Sigma_{z z r z} = \Sigma_{z z z r} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{r z z}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{1}{R} \Sigma_{r z r} + \frac{\partial \Sigma_{r z r}}{\partial R} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta \theta r z} = \Sigma_{\theta \theta z r} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\Sigma_{r z r}}{R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial \Sigma_{r z r}}{\partial R} + \frac{\partial \Sigma_{r z z}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{r r z z} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{z z r}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{1}{R} \Sigma_{z z r} + \frac{\partial \Sigma_{z z z}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{r z z z} = \Sigma_{z r z z} = G \left( -\frac{\partial \Sigma_{z z r}}{\partial Z} + \frac{\partial \Sigma_{z z z}}{\partial R} \right)$$

IV.2.2.4

IV.2.2.5

$$\Sigma_{z z z z} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{z z z}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{1}{R} \Sigma_{z z r} + \frac{\partial \Sigma_{z z r}}{\partial R} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta \theta z z} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\Sigma_{z z r}}{R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial \Sigma_{z z r}}{\partial R} + \frac{\partial \Sigma_{z z z}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{r r \theta \theta} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta r}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{1}{R} \Sigma_{\theta \theta r} + \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta z}}{\partial Z} \right) \right]$$

$$\Sigma_{z r \theta \theta} = \Sigma_{r z \theta \theta} = G \left( -\frac{\partial \Sigma_{\theta \theta r}}{\partial Z} + \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta z}}{\partial R} \right)$$

$$\Sigma_{z z \theta \theta} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta z}}{\partial Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{1}{R} \Sigma_{\theta \theta r} + \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta r}}{\partial R} \right) \right]$$

$$\Sigma_{\theta \theta \theta \theta} = 2G \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\Sigma_{\theta \theta r}}{\partial R} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( -\frac{\partial \Sigma_{\theta \theta r}}{\partial R} + \frac{\partial \Sigma_{\theta \theta z}}{\partial Z} \right) \right]$$

y el resto de términos nulos.

Sustituyendo las expresiones del tensor  $\Sigma_{ijk}$  dadas en (IV.2.1.9) en función del tensor  $U_{ik}$  y operando, es posible llegar a las expresiones siguientes; donde  $\Sigma_{ijkl}$  aparece en función del tensor  $U_{ik}$  y sus derivadas.

$$\Sigma_{rrrr} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + (1-\nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{U_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} \right] \right\}$$

IV.2.2.6

$$\Sigma_{rzrr} = \Sigma_{zrrr} = \frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial R} \right] + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial R} + \frac{\partial U_{irr}}{\partial Z} \right] + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial R} \right\}$$

$$\Sigma_{zzrr} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} + (1-\nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{irr}}{\partial r \partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{Rr} U_{rr} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\theta\theta rr} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \nu(1-\nu) \left[ \frac{1}{Rr} U_{rr} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{rrrz} = \Sigma_{rrzr} = \frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) + \nu \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

IV.2.2.6

$$\begin{aligned} \Sigma_{rzzr} = \Sigma_{zrrz} = \Sigma_{zrzr} = \Sigma_{rzzr} = G^2 \left[ \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{zzrz} = \Sigma_{zzr} = \frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) + \nu \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\theta\theta rz} = \Sigma_{\theta\theta zr} &= -\frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \left[ \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right] \frac{1}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) \right] \right\} \\ \Sigma_{rrzz} &= -\frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + (1-\nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{Rr} U_{rr} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] \right\} \quad \text{IV.2.2.6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{rzzz} = \Sigma_{zrzz} &= -\frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial R} \right] + \nu \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial Z} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial U_{rz}}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial R} \right] \right\} \\ \Sigma_{zzzz} &= -\frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} + \nu(1-\nu) \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{Rr} U_{rr} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\Sigma_{\theta\theta zz} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \nu(1-\nu) \left[ \frac{1}{rR} U_{rr} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] \right\}$$

$$\Sigma_{rr\theta\theta} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \nu(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + \frac{U_{rr}}{Rr} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] \right\}$$

$$\Sigma_{rz\theta\theta} = \Sigma_{zr\theta\theta} = \frac{2G^2}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial R} \right] + \nu \left[ \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial R} \right] \right\} \quad \text{IV.2.2.6}$$

$$\Sigma_{zz\theta\theta} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} + \nu(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} + \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} + \frac{U_{rr}}{Rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} \right] + \nu^2 \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} \right] \right\}$$

$$\Sigma_{\theta\theta\theta\theta} = \frac{4G^2}{(1-2\nu)^2} \left\{ (1-\nu)^2 \frac{U_{rr}}{Rr} + \nu(1-\nu) \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} \right] + \nu^2 \left[ \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} + \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} \right] \right\}$$



Ahora, es posible ya el calcular el tensor  $S_{ijk}$  en función del tensor anterior a partir de las expresiones siguientes:

$$S_{rrr} = \Sigma_{rrrr} n_r + \Sigma_{rrzz} n_z$$

$$S_{rzz} = S_{zrr} = \Sigma_{rzzr} n_r + \Sigma_{rzzz} n_z$$

$$S_{zzr} = \Sigma_{zzrr} n_r + \Sigma_{zzzz} n_z$$

$$S_{\theta\theta r} = \Sigma_{\theta\theta rr} n_r + \Sigma_{\theta\theta zr} n_z$$

IV.2.2.7

$$S_{rrz} = \Sigma_{rrrz} n_r + \Sigma_{rrzz} n_z$$

$$S_{rzz} = S_{zrz} = \Sigma_{rzzr} n_r + \Sigma_{rzzz} n_z$$

$$S_{zzz} = \Sigma_{zzrz} n_r + \Sigma_{zzzz} n_z$$

$$S_{\theta\theta r} = \Sigma_{\theta\theta rz} n_r + \Sigma_{\theta\theta zr} n_z$$

Las derivadas necesarias para el cálculo de los tensores anteriores vienen definidas en el apéndice II.

En definitiva, las expresiones de las tensiones en un punto interno vienen dadas por la relación IV.2.2.3, con los tensores definidos en IV.2.2.4 y IV.2.2.7, siendo en todo análoga a la desarrollada en el apartado II.3 para el caso tridimensional.

### IV.2.3.- ECUACION DE SOMIGLIANA PARA PUNTOS DEL CONTORNO

Como en el caso tridimensional, será ahora necesario el planteamiento de la ecuación de movimientos para puntos del contorno, para lo cual, como en el caso anterior, se hace tender el punto donde se centra la singularidad al contorno del dominio. Con ello, se reduce a obtener la ecuación 11.4.4, que repetimos en IV.2.3.1, y donde  $S_\epsilon$  se refiere en este caso a la superficie de la parte de toro, de sección de radio  $\epsilon$  y de directriz el anillo singular  $(R, Z)$ ; que intersecta en el dominio.

En la Fig. IV.2.3.1 puede verse el corte de ésta superficie con un plano de simetría axial  $r, z$ :

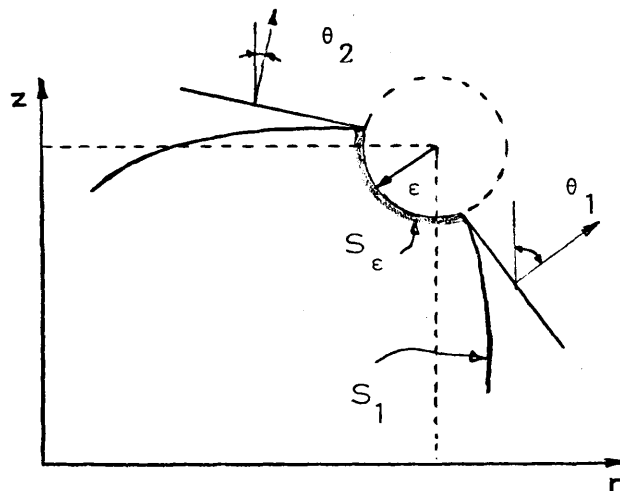


Fig. IV.2.3.1

$$\delta_{ki} u_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_1} U_{ik} t_i ds_y + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} U_{ik} t_i ds_y - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_1} T_{ik} u_i ds_y - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y \quad \text{IV.2.3.1}$$

Para calcular las integrales extendidas a  $S_\epsilon$  y el límite consiguiente se adoptarán las aproximaciones asintóticas definidas en IV.2.1.11 con lo que  $U_{ik}$  será de orden  $O(\ln \epsilon)$  y  $ds_y$  de orden  $O(\epsilon)$ , siendo pues evidente que la primera integral se anula.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} U_{ik} t_i ds_y = 0 \quad \text{IV.2.3.2}$$

La segunda integral extendida a  $S_\epsilon$  en IV.2.3.1 no se anula, siendo necesario realizar su cálculo.

Para ello, hay que realizar la integración de  $T_{ik}$  sobre la superficie del trozo de toro indicado con centro de la sección de coordenadas  $R, Z$  (vease en la Fig. IV.2.3.1) y haciendo uso de las aproximaciones de las funciones de Legendre definidas en las expresiones IV.2.1.11y IV.2.1.12.

Asimismo, es necesario el realizar otras aproximaciones. Así, observando la Fig. IV.2.3.2 se deduce

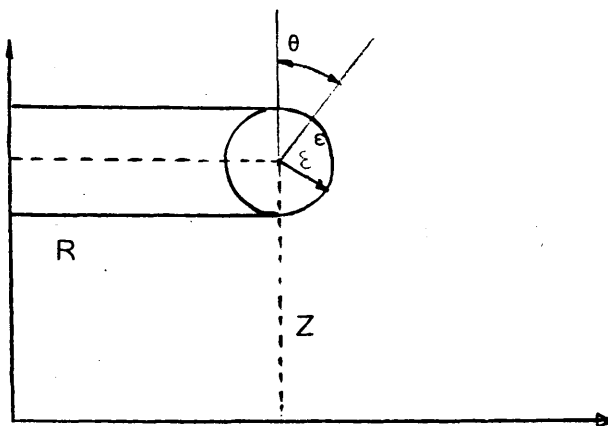


Fig. IV.2.3.2

$$dS_y = 2\pi r \epsilon d\theta$$

$$R-r = -\epsilon \sin \theta$$

$$Z-z = -\epsilon \cos \theta$$

$$\gamma-1 = \frac{\epsilon^2}{2R^2}$$

IV.2.3.3

$$(\gamma-1)^2 = \frac{\epsilon^2}{R^2}$$

$$Q_{-\frac{1}{2}} = Q_{\frac{1}{2}} = -\ln \epsilon$$

$$\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} = -\frac{R^2}{\epsilon}$$

Todo ello sin más que aplicar la expresión de  $\gamma$  y las aproximaciones de  $Q_{-\frac{1}{2}}$  y  $Q_{\frac{1}{2}}$  para el caso de la superficie tórica que nos ocupa, y despreciar los infinitesimales de orden superior, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Recordando ahora la expresión de  $\Sigma_{ijk}$  y  $T_{ik}$  dadas en IV.2.1.9 y IV.2.1.10 en función de las derivadas de  $U_{ik}$  se deduce la necesidad de calcular los límites de cada una de estas derivadas de los movimientos para a continuación ensamblarlas y calcular el límite de  $T_{ik}$ . Para mayor facilidad y porque luego será necesario, calcularemos el límite del producto de  $\epsilon$  por cada una de las derivadas antedichas, obteniéndose a partir de las expresiones del apéndice II para estas derivadas, y de las aproximaciones IV.2.1.11 lo siguiente



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} = \frac{\text{sen } \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R} [8 \cos^2 \theta - (12 - 16 \nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} = \frac{\cos \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R} [8 \cos^2 \theta - (20 - 14 \nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} = \frac{4 \cos \theta \cos 2 \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} = \frac{-4 \text{sen } \theta \cos 2 \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} = \frac{4 \cos \theta \cos 2 \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} = \frac{-4 \text{sen } \theta \cos 2 \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} = \frac{-\text{sen } \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R} [8 \cos^2 \theta + (12 - 16 \nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} = \frac{-\cos \theta}{64 \pi^2 G (1-\nu) R} [8 \cos^2 \theta + (4 - 16 \nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{U_{rr}}{r} = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \frac{U_{rz}}{r} = 0$$

IV.2.3.4

Si ahora ensamblamos todos los límites anteriores para el cálculo del límite de  $\epsilon \Sigma_{ijk}$  para poder luego integrar se obtendrá, haciendo uso de las expresiones - lo siguiente:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{rrr} = \frac{-\sin \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [(1 - 2\nu) + 2 \sin^2 \theta]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{rzz} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{zrr} = \frac{\cos \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [2 \cos^2 \theta - (3 - 2\nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{zzr} = \frac{\sin \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [(1 - 2\nu) - 2 \cos^2 \theta]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{\theta\theta r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{\theta\theta z} = 0$$

IV.2.3.5

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{rrz} = \frac{\cos \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [(1 - 2\nu) - 2 \sin^2 \theta]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{rzz} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{zrz} = \frac{-\sin \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [2 \cos^2 \theta + (1 - 2\nu)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \Sigma_{zzz} = \frac{-\cos \theta}{8 \pi^2 (1 - \nu) R} [(1 - 2\nu) + 2 \cos^2 \theta]$$

Por último si realizamos las integrales correspondientes al tensor  $T_{ik}$ , observando que

$$n_r = \sin \theta \quad n_z = \cos \theta$$

IV.2.3.6

se tiene por ejemplo para  $T_{rr}$  que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} T_{rr} u_r ds_y = -2\pi R \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta_2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{rr} u_r \epsilon d\theta =$$

$$= -2\pi R u_r(x) \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta_2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\epsilon \Sigma_{rrr} n_r + \epsilon \Sigma_{rzz} n_z] d\theta =$$

$$= \frac{-2\pi R}{8\pi^2(1-\nu)R} u_r(x) \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta_2} -\sin^2 \theta [(1-2\nu) + 2\sin^2 \theta] +$$

$$+ \cos^2 \theta [2\cos^2 \theta - (3-2\nu)] d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} u_r(x) \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta_2} [(3-2\nu)\cos^2 \theta + (1-2\nu)\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta] d\theta =$$

$$= \frac{u_r(x)}{8\pi(1-\nu)} [4(1-\nu)(\pi + \theta_2 - \theta_1) + (\sin^2 \theta_1 - 2\sin^2 \theta_2)]$$

Operando análogamente para todos los demás términos se puede obtener el tensor  $C_{ik}$ , definido en IV.2.9 cuya expresión para el caso axisimétrico es la siguiente

$$\begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rz} \\ C_{zr} & C_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)(\pi + \theta_2 - \theta_1) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) & -(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) \\ -(\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) & 4(1-\nu)(\pi + \theta_2 - \theta_1) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2) \end{bmatrix}$$

IV.2.3.7

Expresión que para superficie suave ( $\theta_2 \equiv \theta_1$ ) se hace igual a  $\frac{1}{2} \delta_{ik}$  como era presumible, y para  $\theta_1 \equiv \theta_1 - \pi$  (toro completo) se hace cero, como ya se apuntó en IV.2.1.

Con ello queda de nuevo totalmente definida la ecuación IV.2.3.1 con las integrales por supuesto entendidas en el sentido de Cauchy, tal como se desarrolló en el caso tridimensional.



#### IV.2.4.- TENSOR DE TENSIONES EN PUNTOS DEL CONTORNO

Como ya se indicó en 11.5 , el cálculo del tensor de tensiones en un punto del contorno requiere de la utilización de una cierta aproximación, no pudiéndose realizar en forma exacta. Esta aproximación sigue la misma pauta que la que se siguió en el apartado antedicho.

Eligiendo, un eje local 1, en el punto donde se pretende calcular el tensor de tensiones, definido según la dirección tangente al contorno en ese punto, y con sentido contrario al de recorrido del contorno, y un eje 2 según la dirección y sentido de la normal exterior al contorno en el punto en consideración, las componentes del tensor de tensión en ese sistema de ejes serán

$$\sigma_2 = t_2$$

IV.2.4.1

$$\tau_{12} = \tau_{21} = t_1$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  son los datos de contorno en tensiones de ese punto, conocidos ó ya incógnitas consideradas en el problema, y resuelto éste conocidas también.

Suponiendo posible el calcular las variaciones de los movimientos según 1 y 2 en la dirección 1 se tiene.

$$\sigma_2 = 2G \epsilon_2 + \frac{2G \nu}{1-2\nu} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_\theta)$$

de donde

$$\epsilon_2 = \frac{1}{1-\nu} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\sigma_2}{2G} \right) - \nu (\epsilon_1 + \epsilon_\theta) \right]$$

y como

$$\sigma_1 = 2G\epsilon_1 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_\theta)$$

se tiene

$$\sigma_1 = \frac{1}{1-\nu} (2G\epsilon_1 + 2G\nu\epsilon_\theta + \nu\sigma_2) \quad \text{IV.2.4.2}$$

con  $\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$   $\epsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$  en el punto considerado, siendo todo pues dato ó -

resultado y por lo tanto posible el calculo de  $\sigma_{ij}$ .

IV.2.5.- TRATAMIENTO DE LAS FUERZAS POR UNIDAD DE VOLUMEN

Las expresiones II.6.23 y II.6.24 permitirían el paso de la integral de volumen correspondiente a fuerzas de volumen a una integral de superficie en la forma

$$\int_{\Omega} U_{ik} X_i d\Omega_y = \int_{\delta\Omega} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta\Omega} F_k ds_y \quad \text{IV.2.5.1}$$

donde

$$E_{ik} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} x_{lk',l} n_i - x_{ik',p} n_p + x_{jk',i} n_j$$

$$F_k = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} K_o x_{lk} n_l \quad \text{IV.2.5.2}$$

$$K_o = X_{i,i} = \text{Cte.}$$

En el caso axisimétrico, se han de desarrollar los tensores anteriores teniendo en cuenta la expresión del tensor de Galerkin definida en IV.2.1.6. Por ejemplo el  $E_{rr}$  quedará

$$\begin{aligned} E_{rr} &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial x_r}{\partial r} n_r - \frac{\partial x_r}{\partial r} n_r - \frac{\partial x_r}{\partial z} n_z + \frac{\partial x_r}{\partial r} n_r = \\ &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial x_r}{\partial r} n_r - \frac{\partial x_r}{\partial r} n_z \end{aligned} \quad \text{IV.2.5.3}$$

y análogamente

$$E_{zr} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial x_r}{\partial r} n_z + \frac{\partial x_r}{\partial z} n_r$$

$$E_{rz} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial x_z}{\partial z} n_r + \frac{\partial x_z}{\partial r} n_z$$

IV.2.5.4

$$E_{zz} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial x_z}{\partial z} n_z - \frac{\partial x_z}{\partial r} n_r$$

y análogamente para  $F_k$  se tiene

$$F_r = - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} K_o x_r n_r$$

IV.2.5.5

$$F_z = - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} K_o x_z n_z$$

El tratamiento de fuerzas de peso propio, bulones de tensión y temperatura es en todo análogo al desarrollo en 11.6 para el caso tridimensional, por lo que nos fijaremos en un caso muy frecuente en estructuras axisimétricas, como es el de la fuerzas de volumen debidas a la aceleración centrífuga en una rotación.

Por simplicidad consideraremos rotación alrededor del eje de simetría, con lo que

$$X = \begin{Bmatrix} \rho w^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

IV.2.5.6

cuya divergencia es evidentemente nula ( $K_o = 0$ ) y su rotacional también es nulo, probando que derivan de una función potencial.

En este caso, el vector correspondiente a la integral de volumen quedaría

$$\int_{\delta \Omega} E_{ik} X_i ds_y = \rho w^2 \int_{\delta \Omega} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \chi_r}{\partial r} n_r - \frac{\partial \chi_r}{\partial z} n_z \\ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \chi_z}{\partial z} n_r + \frac{\partial \chi_z}{\partial r} n_z \end{array} \right\} ds_y \quad \text{IV.2.5.7}$$

donde todas las derivadas del vector de Galerkin se presentan en el apéndice

#### IV.3.- APROXIMACION NUMERICA. CASO DE APROXIMACION CONSTANTE

##### IV.3.1.- REPRESENTACION DE LA SUPERFICIE DEL DOMINIO Y DE LAS FUNCIONES

La representación de la superficie es análoga a la del M.E.F. para el caso - axisimétrico, utilizándose el elemento axisimétrico lineal para láminas de elementos finitos, es decir con sección en el plano  $r, z$  un segmento recto definido por sus dos extremos. Las coordenadas de cualquier punto de este segmento Fig. IV.3.1.1, pueden definirse como

$$x_i = N_\alpha x_i \quad \alpha = 1, 2$$

con  $N_1 = \xi_1$  y  $N_2 = \xi_2$ . Pudiéndose también representar por

$$x_i = \frac{x_i^b + x_i^a}{2} \xi + \frac{x_i^b - x_i^a}{2}$$

IV.3.1.1

Los elementos diferenciales para la representación antedicha es

$$dA = 2\pi r \cdot \frac{L}{2} d\xi \quad \text{IV.3.1.2}$$

Los valores de la función se suponen constantes sobre cada elemento por lo que el valor representativo de la función sobre un elemento es el valor de dicha función en el punto medio del segmento para el caso del contorno.

$$u_i = u_i \text{ (C D G)}$$

$$t_i = t_i \text{ (C D G)}$$

IV.3.1.3

$$X_i = X_i \text{ (C D G)}$$

### IV.3.2.- DISCRETIZACION Y TRATAMIENTO DE LA ECUACION INTEGRAL

Debido a que para el caso constante los nodos que aparecen tras la discretización, y donde se suponen concentrados los valores de la función y de su derivada están en el centro del elemento, el ángulo interior abarcado en el contorno del punto es de  $90^\circ$  y por tanto, el tensor  $C_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik}$  para todos los nodos. La ecuación de contorno quedará pues

$$\frac{1}{2} \delta_{ik} u_i = \int_{\delta \Omega} U_{ik} t_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik} u_i ds_y + \int_{\delta \Omega} E_{ik} X_i ds_y + \int_{\delta \Omega} F_k ds_y \quad \text{IV.3.2.1}$$

Si discretizamos la superficie en N elementos, la ecuación anterior (análoga mente al caso tridimensional), en la forma

$$\frac{1}{2} \delta_{ik} u_i = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\delta \Omega_n} U_{ik} t_i ds_n - \int_{\delta \Omega_n} T_{ik} u_i ds_n + \int_{\delta \Omega_n} E_{ik} X_i ds_n + \int_{\delta \Omega_n} F_k ds_n \right] \quad \text{IV.3.2.2}$$

Teniendo en cuenta que la aproximación de las funciones es constante e igual al valor de cada función en el C D G del elemento, la ecuación representa un sistema de ecuaciones con  $4N$  incógnitas y al aplicarla a los N C D G de los elementos del contorno se obtiene un sistema de  $2N \times 4N$ , con lo cual para que pueda resolverse es imperativo el fijar  $2N$  de estas incógnitas como condiciones de contorno.

Esta integral puede desarrollarse en la forma



$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} u_r \\ \frac{1}{2} u_z \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \int_{\delta \Omega_n} \begin{Bmatrix} U_{rr} & U_{zr} \\ U_{rz} & U_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_r (C D G)_n \\ t_z (C D G)_n \end{Bmatrix} ds_n -$$

$$- \int_{\delta \Omega_n} \begin{Bmatrix} T_{rr} & T_{zr} \\ T_{rz} & T_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r (C D G)_n \\ u_z (C D G)_n \end{Bmatrix} ds_n +$$

$$+ \int_{\delta \Omega_n} \begin{Bmatrix} E_{rr} & E_{zr} \\ E_{rz} & E_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_r (C D G)_n \\ X_z (C D G)_n \end{Bmatrix} ds_n + \int_{\delta \Omega_n} \begin{Bmatrix} F_r \\ F_z \end{Bmatrix} ds_n$$

IV.3.2.3

Para un nodo  $\alpha$  tendremos pues un sistema de 2 ecuaciones que es el siguiente:

te:

$$\sum_{n=1}^N B_{ik_n}^{\alpha} u_i^n = \sum_{n=1}^N (A_{ik_n}^{\alpha} t_i^n + P_{k_n}^{\alpha})$$

IV.3.2.4

donde

$$\begin{aligned}
 B_{ik_n}^\alpha &= \int_{\delta \Omega_n} T_{ik}(\alpha, n) ds_n \quad \text{para } t \neq n \quad y \\
 B_{ik_n}^\alpha &= \int_{\delta \Omega_n} T_{ik}(\alpha, n) ds_n + \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad \text{para } t = n \\
 A_{ik_n}^\alpha &= \int_{\delta \Omega_n} U_{ik}(\alpha, n) ds_n \\
 P_{k_n}^\alpha &= X_i^n \int_{\delta \Omega_n} E_{ik}(\alpha, n) ds_n + \int_{\delta \Omega_n} F_k(\alpha, n) ds_n
 \end{aligned}
 \tag{IV.3.2.4}$$

$$u_i^n = u_i (C D G)_n$$

$$t_i^n = t_i (C D G)_n$$

$$X_i^n = X_i (C D G)_n$$

En forma matricial por último esta expresión puede escribirse como

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{A} \underline{t} + \underline{P} \tag{IV.3.2.5}$$

donde B, A son matrices de dimensión 2N x 2N, y  $\underline{t}$ ,  $\underline{u}$  y  $\underline{P}$  son vectores, - de dimensión 2N.

El cálculo de las matrices B, A y P permitirá pues la resolución del problema.

### IV.3.3.- EVALUACION DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACION

Es bastante cómodo el realizar las integraciones sobre elementos a los que no pertenece el nodo desde el que se integra, es decir para  $t \neq n$ , ya que en este caso se puede realizar numéricamente, con un esquema por ejemplo de Gauss monodimensional para integraciones sobre elementos del contorno. Así por ejemplo

Para  $t \neq n$

$$\begin{aligned} \int_n f ds_n &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} 2\pi r f dl = \int_{-1}^1 2\pi r(\xi) f(\xi) \frac{L}{2} d\xi = \\ &= \pi L \sum_{k=1}^N w_k r(\xi_k) f(\xi_k) \end{aligned} \quad \text{IV.3.3.1}$$

donde  $w_k$  son los pesos de Gauss y  $\xi_k$  los puntos de Gauss correspondientes a una cuadratura monodimensional de  $N$  puntos.

Sin embargo para  $t = n$  es preciso tener cuidado en la integración pues para  $(r, z) \rightarrow (R, Z)$ ,  $\gamma \rightarrow 1$  :  $Q_{\frac{1}{2}}(\gamma)$  y  $Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  tienden a  $\infty$  con lo cual es esperable malos resultados en la realización de la integración numérica.

Para soslayar este problema se suele realizar la integración analítica cuando se integra sobre el propio elemento, al que pertenece el nodo singular, ó mediante la utilización de un gran número de puntos de Gauss.

En este caso la primera aproximación tiene el inconveniente de ser muy difícil debido a la complicación en el uso de las funciones de Legendre, mientras que la segunda exige un gran tiempo en la computación.

Es por ello que se ha seguido en este trabajo un método, ya utilizado por Wrobel [129] en Teoría del Potencial, y que consiste en la integración analítica sobre parte del elemento muy cerca de la singularidad, donde las funciones de Legendre, como se indicó tienen una aproximación relativamente sencilla, y realizar una integración numérica el estilo de Gauss, en el resto del elemento.

Así, para elementos del contorno se realizará esta integración sobre una longitud  $S$ , situada como indica la Fig. IV.3.3.1.

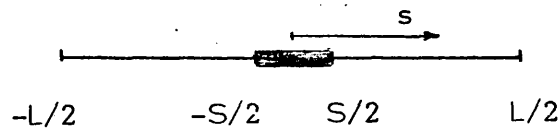


Fig. IV.3.3.1

Sobre el resto del dominio  $-\frac{L}{2} < s < -\frac{S}{2}$  y  $\frac{S}{2} < s < \frac{L}{2}$  se realizará una integración numérica.

Antes de comenzar el cálculo de la integración analítica, es necesario hacer algunas consideraciones y aproximaciones previas.

En lo sucesivo se seguirán algunas notaciones y aproximaciones que a continuación vamos a indicar.

Observando la Fig. IV.3.3.2 es fácil deducir que

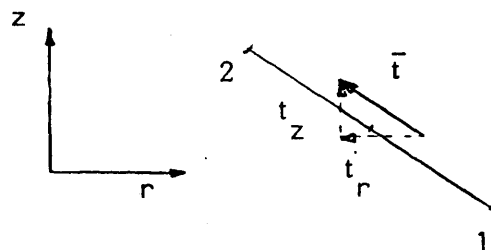


Fig. IV.3.3.2

$$t_r = \frac{r_2 - r_1}{L}$$

$$t_z = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$r - R = t_r s$$

$$z - Z = t_z s$$

$$\gamma = 1 + \frac{(R - r)^2 + (Z - z)^2}{2Rr} = 1 + \frac{s^2}{2Rr}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{t_r s (r + R) - t_z^2 s^2}{2Rr^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{t_z s}{Rr}$$

#### IV.3.3.2

$$\frac{\partial \gamma}{\partial R} = \frac{-t_r s (r + R) - t_z^2 s^2}{2R^2 r}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Z} = \frac{t_z s}{Rr}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} = \frac{-(r^2 + R^2) + t_z^2 s^2}{2R^2 r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} = \frac{t_z s}{Rr^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} = \frac{t_z s}{R^2 r}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} = \frac{-1}{Rr}$$

Teniendo en cuenta que la integración analítica se realizará en puntos donde  $\gamma \rightarrow 1$  podemos hacer las siguientes aproximaciones

$$Q_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{s^2}{64 Rr} \right) - 2$$

$$Q_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{s^2}{64 Rr} \right)$$

$$\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} = -\frac{Rr}{s^2}$$

IV.3.3.3

$$\frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} = \frac{2R^2 r^2}{s^4}$$

$$\frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} = \frac{-8R^3 r^3}{s^6}$$

Con ello puede comenzarse a calcular las integrales analíticas en el contorno.

- Integración de la matriz  $\underline{A}$  -

Las integrales correspondientes a esta matriz son:

$$\int_A U_{rr} dA = 2\pi \int_{-S/2}^{S/2} r U_{rr} ds = \frac{-1}{8\pi G (1-\nu) R} \left[ \frac{(3-4\nu)}{2} I_1 + \right. \\ \left. + (6 - 8\nu + t_z^2) I_2 \right] \quad \text{IV.3.3.4}$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  vienen definidas en el apéndice II.

$$\int_A U_{zr} dA = \frac{t_z}{8\pi^2 G (1-\nu) \sqrt{R}} \left[ 1/4 I_3 + \frac{1}{2} I_4 - R I_5 + I_6 \right] \quad \text{IV.3.3.5}$$

viniendo de nuevo  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  e  $I_6$  dadas en el apéndice

$$\int_A U_{rz} dA = \frac{t_z}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \left[ -1/4 I_3 - \frac{1}{2} I_4 - R I_5 + I_6 \right] \quad \text{IV.3.3.6}$$

Por último la integral de  $U_{zz}$  queda en la forma

$$\int_A U_{zz} dA = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \left[ \frac{-(3-4\nu)}{2} I_1 + t_z^2 I_2 \right] \quad \text{IV.3.3.7}$$

Con ello queda totalmente determinado el cálculo de la matriz  $A$ .

- Integraciones correspondientes a la matriz B -

También hay que realizar la integración en el contorno, pero como se dijo - anteriormente, el tensor  $T_{ik}$  no está ensamblado, por lo que calcularemos las integrales de los elementos que lo componen, es decir de las derivadas de  $U_{ik}$ , y a continuación el cálculo de  $T_{ik}$  se reduciría a sumarlas convenientemente según las expresiones IV.2.1.9 y IV.2.1.10.

$$\int_A \frac{U_{rr}}{r} ds = 2\pi \int_{-S/2}^{S/2} U_{rr} ds = \frac{-1}{8\pi G (1-\nu)\sqrt{R}} \left[ \frac{3-4\nu}{2} I_1 + (6-8\nu+t_z^2) I_2 \right] \quad \text{IV.3.3.8}$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  vienen dadas en el apéndice

$$\int_A \frac{U_{rz}}{r} dA = \frac{-t_z}{8\pi G (1-\nu)\sqrt{R}} \left[ 1/4 I_3 + R I_4 + \frac{1}{2} I_5 - I_6 \right] \quad \text{IV.3.3.9}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} dA = \frac{1}{8\pi G (1-\nu)\sqrt{R}} \left[ t_r \left( t_z^2 - \frac{3-4\nu}{2} \right) I_6 + t_r R \left( t_z^2 - \frac{3-4\nu}{2} \right) I_4 + \left[ (3-4\nu) + (3-2\nu) t_z^2 - t_z^4 \right] I_2 + 1/4 I_1 \right] \quad \text{IV.3.3.10}$$



$$\int_A \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} dA = \frac{-t_z}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \left[ (3 + 2t_r^2 - 4\nu) I_6 \right] \quad \text{IV.3.3.11}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} dA = \frac{t_z}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \left[ t_z^2 R I_4 - t_r^2 I_6 + \frac{t_r R}{4} I_7 + \right. \\ \left. + \frac{(4t_z^2 - 1)t_r}{4} I_2 - \frac{(3 + t_z^2)}{4} I_5 - 3/8 I_3 \right] \quad \text{IV.3.3.12}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} dA = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \left[ (1 - 2t_z^2) t_r I_6 + \frac{1}{2} (1 + t_z^2) I_2 + 1/4 I_1 \right] \quad \text{IV.3.3.13}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} dA = \frac{t_z}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \left[ R t_z^2 I_4 - t_r^2 I_6 + (t_z^2 - 3/4) t_r I_2 - \right. \\ \left. - \frac{t_r R}{4} I_7 + \frac{(3 + t_z^2)}{4} I_5 + 3/8 I_3 \right] \quad \text{IV.3.3.14}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} dA = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \left[ t_r (1 - 2t_z^2) I_6 - \frac{1}{2} (1 + t_z^2) I_2 - 1/4 I_1 \right] \quad \text{IV.3.3.15}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} dA = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \left[ t_z^2 (t_z^2 - 2\nu) I_2 - t_r/2 (3 - 4\nu + 2 t_z^2) \cdot (I_6 + R I_4) + 1/4 I_1 \right] \quad \text{IV.3.3.16}$$

$$\int_A \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} dA = \frac{t_z [2 t_r^2 - (3 - 4\nu)]}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} I_6 \quad \text{IV.3.3.17}$$

Calculando sucesivamente las integrales de estas derivadas en sus partes - analíticas y numéricas y luego combinándolas en la forma que se indica se pueden conocer los elementos correspondientes a la matriz B que era precisamente lo buscado.

#### - Integrales correspondientes a P -

Observando detenidamente las expresiones de los términos del vector P definido en IV.2.5 y teniendo en cuenta que en un elemento rectilíneo las componentes de la normal son constantes, se deduce que solo es necesario calcular las integrales correspondientes a  $x_{ik}$  y sus primeras derivadas para posteriormente ensamblarlas - en la forma que indica la ecuación anterior y calcular los términos correspondientes del vector P. Naturalmente esto es posible porque en elementos constantes  $n_k$  y  $X_k$  - son constantes en todo el elemento, como se ha indicado anteriormente. En caso contrario no sería posible esta simplificación.

En definitiva tendremos

$$\int_A x_r dA = 2 \int_{-S/2}^{S/2} r \Psi_r dA = \frac{-\sqrt{R}}{6\pi G} (2 I_1 - 1/R I_2 - 1/4R I_3)$$

IV.3.3.18

donde las integrales  $I_1, I_2, I_3$  y las siguientes están dadas en el apéndice

$$\int_A x_z dA = \frac{-\sqrt{R}}{6\pi G} (-2 I_1 + 1/4R I_3)$$

IV.3.3.19

Asimismo con las derivadas primeras tenemos.

$$\int_A \frac{\partial x_r}{\partial r} dA = \frac{3 t_1}{12\pi G \sqrt{R}} \left[ -\frac{3 t_z}{2} I_4 + \frac{1}{2} I_5 + 4 R I_6 + 2 I_5 \right]$$

IV.3.3.20

$$\int_A \frac{\partial x_z}{\partial r} dA = \frac{-1}{4\pi G \sqrt{R}} \left[ -R/2 I_8 - 2 R I_6 + \frac{1}{2} I_9 \right]$$

IV.3.3.21

$$\int_A \frac{\partial x_r}{\partial z} dA = \frac{-t_z}{4\pi G \sqrt{R}} \left[ \frac{1}{2} I_4 - 2 I_7 \right]$$

IV.3.3.22

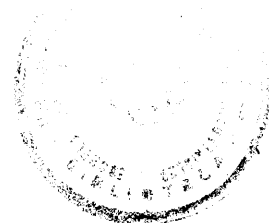
$$\int_A \frac{\partial x_z}{\partial z} dA = \frac{-t_z}{8\pi G \sqrt{R}} I_4$$

IV.3.3.23

Por último, en lo que se refiere al cálculo de las matrices que aparecen en la ecuación correspondiente a tensiones en puntos internos, diremos que no presentan ninguna dificultad numérica, ya que al integrar desde un punto que no pertenece al contorno los núcleos de las integrales no son singulares, pudiéndose calcular estas integrales mediante un proceso de integración numérica, como el indicado para el caso de contorno en que el nodo no pertenezca al elemento sobre el que se integra

Es necesario también hacer una salvedad en cuanto al cálculo de los términos de la diagonal principal. Efectivamente, así como en el caso tridimensional era posible era el calcularlos como suma cambiada de signo del resto de los elementos correspondientes que se encuentran en una misma fila, sin más que considerar el problema simple de movimiento como sólido rígido sin fuerzas de volumen. En este caso, esto no es posible en ambas direcciones, ya que un movimiento como sólido rígido en la dirección  $r$  no tiene sentido, pues significa aumento de radio sin deformación, lo que es imposible.

Es pues necesario en esta dirección el utilizar la expresión usual para los términos de la diagonal principal, mientras que para la dirección  $z$  puede considerarse el movimiento como sólido rígido.



IV.3.4.- APLICACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO Y RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Al igual que en el caso tridimensional, la aplicación de las condiciones de contorno permite poner la ecuación en el contorno en la forma

$$A_{ik_n}^{\alpha} u_i^n = B_{ik_n}^{\alpha} t_i^n + P_{k_n}^{\alpha} \quad \text{IV.3.4.1}$$

o en forma matricial

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{B} \underline{t} + \underline{P} \quad \text{IV.3.4.2}$$

y una vez aplicadas las condiciones de contorno quedará un sistema lineal de ecuaciones en la forma

$$\underline{K} \underline{x} = \underline{F} \quad \text{IV.3.4.3}$$

Tres tipos de condiciones pueden presentarse en la práctica

- Tipo 1.- Condiciones de contorno en movimientos

$$K_{ik_n}^{\alpha} = B_{ik_n}^{\alpha}$$

$$x_i^n = t_i^n$$

$$F_k^{\alpha} = A_{iu_n}^{\alpha} u_i^n - \sum_{n=1}^N P_{k_n}^{\alpha}$$

Tipo 2.- Condiciones en tensiones

$$K_{ik_n}^{\alpha} = A_{ik_n}^{\alpha}$$

$$x_i^n = u_i^n$$

$$F_k^{\alpha} = B_{ik_n}^{\alpha} t_i^n + \sum_{n=1}^N P_{k_n}^{\alpha}$$

- Tipo 3.- Condiciones mixtas

Pueden existir dos casos a su vez

- Datos  $v^n, \sigma^n$

$$K_{i-1 \ k-1_n}^{\alpha} = -A_{i-1 \ k-1_n}^{\alpha}$$

$$K_{i \ k-1_n}^{\alpha} = B_{i \ k-1_n}^{\alpha}$$

$$K_{i-1 \ k_n}^{\alpha} = -A_{i-1 \ k_n}^{\alpha}$$

$$K_{i \ k_n}^{\alpha} = B_{i \ k_n}^{\alpha}$$

$$x_{i-1}^n = u^n$$

$$x_i^n = \tau^n$$

$$F_{k-1}^{\alpha} = -A_{i \ k-1 \ n}^{\alpha} v^n + B_{i-1 \ k-1 \ n}^{\alpha} \sigma^n + \sum_{n=1}^N P_{k-1 \ n}^{\alpha}$$

$$F_k^{\alpha} = -A_{i \ k \ n}^{\alpha} v^n + B_{i-1 \ k \ n}^{\alpha} \sigma^n + \sum_{n=1}^N P_{k \ n}^{\sigma}$$

- Datos  $u^n, \tau^n$

$$K_{i-1 \ k-1 \ n}^{\alpha} = B_{i-1 \ k-1 \ n}^{\alpha}$$

$$K_{i \ k-1 \ n}^{\alpha} = -A_{i \ k-1 \ n}^{\alpha}$$

$$K_{i-1 \ k \ n}^{\alpha} = B_{i-1 \ k \ n}^{\alpha}$$

$$K_{i \ k \ n}^{\alpha} = -A_{i \ k \ n}^{\alpha}$$

$$x_{i-1}^n = \tau^n$$

$$x_i^n = u^n$$

$$F_{k-1}^{\alpha} = -A_{i-1 \ k \ n}^{\alpha} u^n + B_{i \ k-1 \ n}^{\alpha} \tau^n + \sum_{n=1}^N P_{k-1 \ n}^{\alpha}$$

$$F_k^{\alpha} = -A_{i-1 \ k \ n}^{\alpha} u^n + B_{i \ k \ n}^{\alpha} \tau^n + \sum_{n=1}^N P_{k \ n}^{\alpha}$$

Con ello quedan propuestas todas las posibilidades de condiciones de contor-

no en el caso axisimétrico.

En cuanto a la resolución del sistema de ecuaciones, debido a la magnitud - del programa se ha decidido realizarla mediante la utilización de un método standard de eliminación de Gauss que proporciona muy buenos resultados, sin ningún problema adicional.



#### IV.4.- EXTENSION DEL CASO PLASTICO

Se va a desarrollar a continuación y en forma totalmente paralela al caso elástico la formulación y aproximación numérica a plasticidad axisimétrica, si bien no se realizará un desarrollo exhaustivo de la formulación general en plasticidad, quedando éste como una posible extensión futura.

La ecuación de partida para el cálculo de movimientos en puntos internos en plasticidad es idéntica a la de Somigliana, pero con un término adicional, correspondiente a las deformaciones plásticas, pudiendo expresarse (vease Telles [122]) como

$$\delta_{ki} \dot{u}_i(x) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(x, y) \dot{f}_i(y) ds_y - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(x, y) \dot{u}_i(y) ds_y + \\ + \int_{\Omega} U_{ik}(x, y) \dot{\chi}_i(y) d\Omega_y + \int_{\Omega} \Sigma_{ijk}(x, y) \dot{\epsilon}_{ij}(y) d\Omega_y \quad \text{IV.4.1}$$

donde los puntos sobre los distintos vectores significan incremento diferencial, ya que se sigue, como es usual en los casos no lineales, un planteamiento incremental, y el tensor  $\Sigma_{ijk}$ , tiene como significado físico el correspondiente a los términos del tensor de tensiones  $\sigma_{ij}$  que aparece en un punto  $y$  del dominio, cuando en otro punto  $x$  se aplica una carga unidad en la dirección  $k$ .

La expresión de este tensor corresponde exactamente al presentado en IV.2.1.2 en el caso elástico.

La expresión de la derivada de los movimientos respecto a la coordenada  $m$  del punto singular, con el objeto de calcular las tensiones en un punto interno quedaría (vease IV.2.2.1)

$$\begin{aligned}
 \delta_{ki} \dot{u}_{i;m} = & \int_{\delta \Omega_1} U_{ik;m} \dot{t}_i ds_y - \int_{\delta \Omega} T_{ik;m} \dot{u}_i ds_y + \int_{\Omega} U_{ik;m} \dot{X}_i d\Omega_y + \\
 & + \int_{\Omega} \Sigma_{ijk;m} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega_y - \dot{X}_i(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_\epsilon(x)} U_{ik} p_{,m} ds_y - \\
 & - \dot{\epsilon}_{ij}^p(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijk} p_{,m} ds_y
 \end{aligned}
 \tag{IV.4.2}$$

El valor de la primera integral extendida a  $\delta B_\epsilon(x)$  es nulo como se demostró en IV.2.2.2, mientras que si se observa las expresiones  $\Sigma_{ijk}$  definidas en IV.2.1.9 se desprende que la segunda integral presenta una singularidad del tipo fuerte, siendo necesario su cálculo. Para ello se van a aprovechar los resultados obtenidos en IV.2.3.5 que corresponden a los límites de cada uno de los términos del tensor  $\Sigma_{ijk}$  multiplicados por  $\epsilon$ .

Observando en la ecuación IV.4.2 y dandonos cuenta que  $p_{,r} = \sin \theta$  y  $p_{,z} = \cos \theta$  (vease Fig. IV.2.3.2), y que  $\Sigma_{\theta\theta r}$  y  $\Sigma_{\theta\theta z}$  son  $O(\ln \epsilon)$  cuando  $ds_y$  es  $O(\epsilon)$  se tiene

$$- \dot{\epsilon}_{ij}^p(x) \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijr} p_{,r} ds_y = \frac{-(1-4\nu)(\dot{\epsilon}_{rr}^p + \dot{\epsilon}_{zz}^p)}{8(1-\nu)} + \frac{6-8\nu}{8(1-\nu)} \dot{\epsilon}_{rr}^p$$

IV.4.3

Asímismo

$$-\dot{\epsilon}_{ij}^p \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijz} p_{,r} ds_y = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \dot{\epsilon}_{rz}^p \quad \text{IV.4.4}$$

donde se ha hecho uso de que las integrales que multiplican a  $\dot{\epsilon}_{rr}^p$  y  $\dot{\epsilon}_{zz}^p$  son integrales de funciones trigonométricas 0 y  $2\pi$  y por tanto son cero.

También

$$-\dot{\epsilon}_{ij}^p \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijr} p_{,z} ds_y = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \dot{\epsilon}_{rz}^p \quad \text{IV.4.5}$$

Por último

$$-\dot{\epsilon}_{ij}^p \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijz} p_{,z} ds_y = \frac{-(1-4\nu)(\dot{\epsilon}_{rr}^p + \dot{\epsilon}_{zz}^p)}{8(1-\nu)} + \frac{6-8\nu}{8(1-\nu)} \dot{\epsilon}_{zz}^p \quad \text{IV.4.6}$$

El resto de los términos es cero pues las integrales en  $\delta B_\epsilon(x)$  de  $\Sigma_{\theta\theta r}$  así como la de  $\Sigma_{\theta\theta z}$  son cero y  $p_{,\theta}$  es 0 también.

Los resultados anteriores pueden disponerse en forma más compacta como sigue, donde  $k$  y  $m$  varían sólo según  $r$  y  $z$ .

$$-\dot{\epsilon}_{ij}^p \int_{\delta B_\epsilon(x)} \Sigma_{ijk} p_{,m} ds_y = \frac{1}{8(1-\nu)} [ (6-8\nu) \dot{\epsilon}_{km}^p - (1-4\nu) \cdot (\dot{\epsilon}_{rr}^p - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^p) \delta_{km} ] \quad \text{IV.4.7}$$

que es exactamente igual al caso de tensión plana salvo que el coeficiente de Poisson no es el modificado (Telles [122] ).

Si ahora aplicamos el operador elástico  $C_e$  en polares a la ecuación de movimientos internos se volverá a obtener la ecuación (27) del apartado III.1.2 pero con el término libre de deformaciones plásticas modificado. Se tendrá pues que en la ecuación final correspondiente a las tensiones aparecerá un término igual al de tensión plana, quedando en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_y(x) = & \int_{\delta\Omega} D_{ijk} \dot{t}_k ds_y - \int_{\delta\Omega} S_{ijk} \dot{u}_k ds_y + \int_{\Omega} D_{ijk} \ddot{X}_k d\Omega_y + \\ & + \int_{\Omega} \Sigma_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^P d\Omega_y - \frac{G}{4(1-\nu)} [ 2 \dot{\epsilon}_{ij}^P + \delta_{ij} (\dot{\epsilon}_{ll}^P - \dot{\epsilon}_{\theta}^P) ] \end{aligned}$$

IV.4.8

donde los distintos tensores tienen expresiones totalmente análogas al caso elástico viniendo definidos en IV.2.2

Evidentemente el paso al contorno no implica, en el caso plástico, ningún cálculo adicional al ya realizado en elasticidad, ya que las únicas integrales que presentan problemas son las extendidas en la superficie y ya se trataron en IV.2.3.

En lo que se refiere a la aproximación numérica también con elementos constantes, es necesario ahora la discretización del dominio en orden a calcular las integrales de volumen en las que aparecen las deformaciones plásticas. Será necesario pues el añadir al segundo miembro de la expresión IV.3.2.3 un término adicional en la forma

$$\sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \begin{bmatrix} \Sigma_{rrr} & 2 \Sigma_{rzz} & \Sigma_{zzr} & \Sigma_{\theta\theta r} \\ \Sigma_{rrz} & 2 \Sigma_{rzz} & \Sigma_{zzz} & \Sigma_{\theta\theta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^p \text{ (CDG)} \\ \dot{\epsilon}_{rz}^p \text{ (CDG)} \\ \dot{\epsilon}_{zz}^p \text{ (CDG)} \\ \dot{\epsilon}^p \text{ (CDG)} \end{Bmatrix} d\Omega_m \quad \text{IV.4.9}$$

donde M es el número de elementos (anillos de sección triangular por ejemplo) en que se discretiza el dominio plástico, ya que el resto del dominio no es necesario discretizarlo pues en él las deformaciones plásticas son nulas. Evidentemente si la aproximación sobre los elementos se supone constante, existirán M nodos también representativos de los valores de las deformaciones plásticas.

Calculando en estos M nodos los valores de las tensiones, éstas quedarán en la forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr}(p) \\ \sigma_{rz}(p) \\ \sigma_{zz}(p) \\ \sigma_{\theta\theta}(p) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \begin{bmatrix} D_{rrr} & D_{rrz} \\ D_{rzz} & D_{rzz} \\ D_{zzr} & D_{zzz} \\ D_{\theta\theta r} & D_{\theta\theta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_r \text{ (CDG)} \\ \dot{\epsilon}_z \text{ (CDG)} \end{Bmatrix} ds_n$$

$$\begin{aligned}
 & - \delta \Omega_n \begin{bmatrix} S_{rrr} & S_{rrz} \\ S_{rzz} & S_{rzz} \\ S_{zzr} & S_{zzz} \\ S_{\theta\theta r} & S_{\theta\theta z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_r \text{ (CDG)}_n \\ \dot{u}_z \text{ (CDG)}_n \end{Bmatrix} + \delta \Omega_n \begin{bmatrix} J_{rrr} & J_{rrz} \\ J_{rzz} & J_{rzz} \\ J_{zzr} & J_{zzz} \\ J_{\theta\theta r} & J_{\theta\theta z} \end{bmatrix} \\
 & \cdot \begin{Bmatrix} \dot{X}_r \text{ (CDG)}_n \\ \dot{X}_z \text{ (CDG)}_n \end{Bmatrix} ds_n + \sum_{m=1}^M \delta \Omega_m \begin{bmatrix} \Sigma_{rrrr} & 2\Sigma_{rrrz} & \Sigma_{rrzz} & \Sigma_{rr\theta\theta} \\ \Sigma_{rzzr} & 2\Sigma_{rzzz} & \Sigma_{rzzz} & \Sigma_{rz\theta\theta} \\ \Sigma_{zzrr} & 2\Sigma_{zzrz} & \Sigma_{zzzz} & \Sigma_{zz\theta\theta} \\ \Sigma_{\theta\theta zz} & 2\Sigma_{\theta\theta rz} & \Sigma_{\theta\theta zz} & \Sigma_{\theta\theta\theta\theta} \end{bmatrix} \\
 & \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{\epsilon_{rr}}^p \text{ (CDG)}_n \\ \dot{\epsilon}_{\epsilon_{rz}}^p \text{ (CDG)}_n \\ \dot{\epsilon}_{\epsilon_{zz}}^p \text{ (CDG)}_n \\ \dot{\epsilon}_{\epsilon_{\theta\theta}}^p \text{ (CDG)}_n \end{Bmatrix} - \frac{G}{4(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 2\dot{\epsilon}_{\epsilon_{rr}}^p - (\dot{\epsilon}_{\epsilon_{\theta\theta}}^p - \dot{\epsilon}_{\epsilon_{\theta\theta}}^p) \\ 2\dot{\epsilon}_{\epsilon_{rz}}^p \\ 2\dot{\epsilon}_{\epsilon_{zz}}^p - (\dot{\epsilon}_{\epsilon_{\theta\theta}}^p - \dot{\epsilon}_{\epsilon_{\theta\theta}}^p) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4.10}
 \end{aligned}$$

y escritas en forma matricial se obtendría.

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} &= \underline{D} \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{S} \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{P}}' + \underline{T}' \underline{\dot{\epsilon}}^P \\ \underline{B} \underline{\dot{u}} &= \underline{A} \underline{\dot{\epsilon}} + \underline{\dot{P}} + \underline{T} \underline{\dot{\epsilon}}^P \end{aligned} \quad \text{IV.4.11}$$

donde  $\underline{D}$  y  $\underline{S}$  son matrices de  $4M \times 2N$ ,  $\underline{T}'$  es de  $4M \times 4M$ ,  $\underline{B}$  y  $\underline{A}$  son matrices de dimensión  $2N \times 2N$ ,  $\underline{T}$  lo es de  $2N \times 4M$  y el resto son vectores de dimensión  $2N$  salvo el vector de deformaciones plásticas cuya dimensión es  $4M$ .

El cálculo de las matrices anteriores permitirá pues la resolución del problema. Todas ellas se han calculado inicialmente salvo las matrices  $\underline{T}$  y  $\underline{T}'$ .

El cálculo de estas matrices exige el cálculo de las integrales de  $\Sigma_{ijk}$  y  $\Sigma_{ijkl}$  en el dominio.

El procedimiento que se seguirá es en todo análogo al desarrollo en elasticidad. Así para el caso correspondiente a integración sobre elementos a los que no pertenece el elemento se realizará una integración numérica de Hammer, en la forma

$$\int_{\Omega_m} \Sigma_{ijk} d\Omega = \sum_{i=1}^k w_i \Sigma_{ijk}(x, y) \quad \text{IV.4.12}$$

Para el cálculo de los elementos de la matriz correspondiente a la integración desde un nodo sobre un elemento al que pertenece se seguirá la técnica propuesta en el caso elástico, naturalmente extendida al caso del dominio. Para ello según que se integre desde un punto del contorno (matriz  $\underline{T}$ ) ó del dominio (matriz  $\underline{T}'$ ) se estará en una de las situaciones presentadas en las Figs. IV.4.1 y IV.4.2.

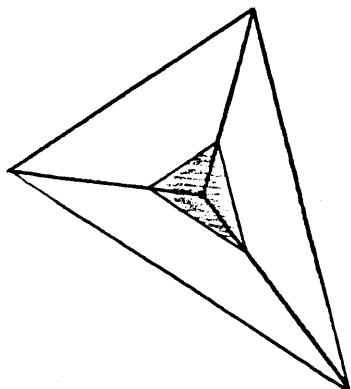


Fig. III.4.1

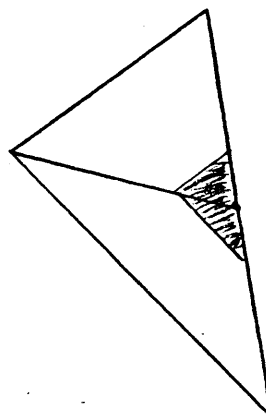


Fig. III.4.2

En el primer caso se realizará la integral de todo el elemento como suma de las integrales sobre dos triángulos uno de cuyos vértices es el nodo singular. La situación es totalmente análoga en el segundo caso, salvo que ahora se divide el elemento en tres subtriángulos.

En ellos se planteará también un proceso de integración mixta similar al desarrollado en el caso elástico, integrándose analíticamente sobre una zona de dominio cercana al punto singular y que suponemos un triángulo semejante al total (zona rayada en las figuras) y numéricamente sobre el resto con un procedimiento de cuadratura de Gauss por ejemplo.

En cuanto al proceso analítico, y debido a la dificultad de realización de estas integrales, se aprovechará el hecho de que la singularidad depende sólo de la distancia  $s$ , realizando una integración semianalítica; analítica en cuanto a la distancia



s se refiere y numérica en cuanto al ángulo  $\theta$ . Así si se observa la Fig. IV.4.3 se -  
tendra

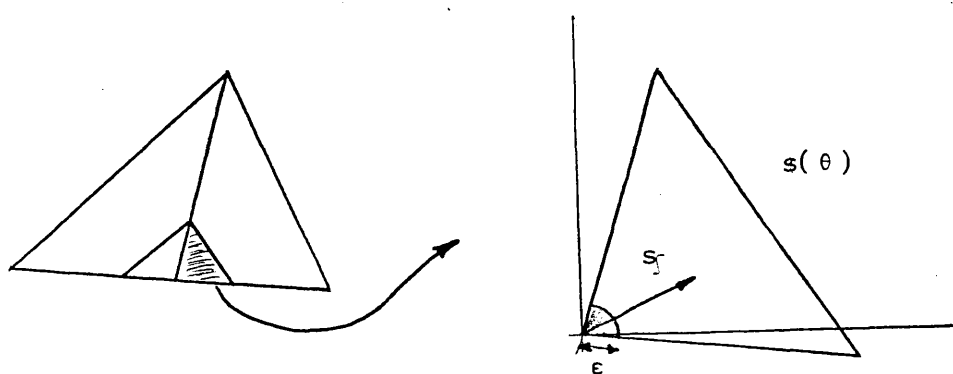


Fig. IV.4.3

$$\int_V f \, dv = 2\pi \int_V s \, f \, dv = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{S(\theta)} s f \, ds \right] \quad \text{IV.4.13}$$

$$\int_V f \, dv = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \cdot I$$

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{S(\theta)} s f \, ds \quad \text{IV.4.14}$$

El cálculo pues de la integral  $I$  es el que hay que abordar para cada uno de los casos que se presentan. Realmente las funciones  $f$  que se van a integrar corresponden exclusivamente a las derivadas primeras y segundas de los movimientos que son las - que aparecen en los tensores  $\Sigma_{ijk}$  y  $\Sigma_{ijkl}$ . Así,

- Matriz T

Para el cálculo de esta matriz es necesario el cálculo de las derivadas primeras, pero extendidas al dominio, donde  $dv = 2\pi r s d\theta ds$ .

Si realizamos exclusivamente analíticamente la parte correspondiente a  $s$  nos damos cuenta que esta integral respecto a  $s$  es la misma integral que para el cálculo de la matriz  $\underline{A}$  pero multiplicadas por  $s$ . Por lo tanto las integrales resultantes serán las mismas que para el caso de  $\underline{A}$  pero por  $s$ , y además extendidas entre  $\epsilon$  y  $S$ , y luego calculando el  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ .

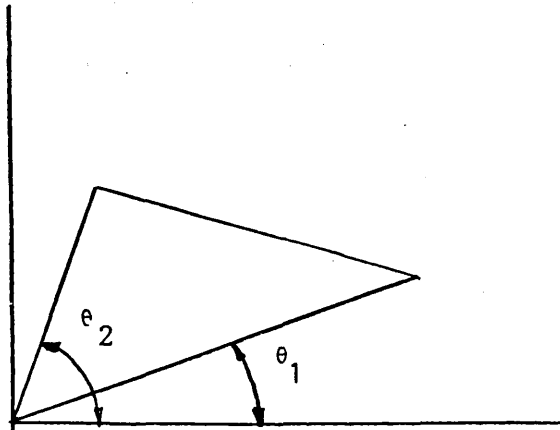


Fig. IV.4.4

$$\int_V \frac{u_{rr}}{r} dv = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{3-4\nu}{2} I_1 + (6-8\nu + t_z^2) I_2 \right] d\theta$$

IV.4.15

donde  $I_1$  e  $I_2$  están dadas en el apéndice II.

$$\int_V \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} dv = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z \left[ t_r^2 R I_4 - t_r^2 I_6 + \frac{t_r R}{4} I_7 + \right. \\ \left. + \frac{(4 t_z^2 - 1) t_r}{4} I_2 - \frac{3 + t_z^2}{4} I_5 - 3/8 I_3 \right] d\theta \quad \text{IV.4.16}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} dv = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ (1 - 2 t_z^2) t_r I_6 + \frac{1}{2} (1 + t_z^2) I_2 + \right. \\ \left. + 1/4 I_1 \right] d\theta \quad \text{IV.4.17}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} dv = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z \left[ R t_z^2 I_4 - t_r^2 I_6 + (t_z^2 - 3/4) t_r I_2 - \right. \\ \left. - \frac{t_r R}{4} I_7 + \frac{3 + t_z^2}{4} I_5 + 3/8 I_3 \right] d\theta \quad \text{IV.4.18}$$

$$\int_V \frac{U_{rz}}{r} dv = \frac{-1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z \left[ 1/4 I_3 + R t_z I_4 + t_z/2 I_5 - t_z I_6 \right] d\theta \quad \text{IV.4.19}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} dv = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ t_r \left( t_z^2 - \frac{3-4\nu}{2} \right) I_6 + t_r R \left( t_z^2 - \frac{3-4\nu}{2} \right) \right. \\ \left. \cdot I_4 + [(3-4\nu) + (3-2\nu) t_z^2 - t_z^4] I_3 \right] \quad \text{IV.4.20}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} dv = \frac{-1}{8 \pi G (1-\nu) R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z (3 + 2t_r^2 - 4\nu) I_6 d\theta \quad \text{IV.4.21}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} dv = \frac{1}{8 \pi G (1-\nu) R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [t_r (1 - 2t_z^2) I_6 - \frac{1}{2} (1 + t_z^2) I_2 - \frac{1}{4} I_1] d\theta \quad \text{IV.4.22}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} dv = \frac{1}{8 \pi G (1-\nu) R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [t_z^2 (t_z^2 - 2\nu) I_2 - t_r/2 (3 - 4\nu + 2t_z^2) \cdot (I_6 - R I_4) + 1/4 I_1] d\theta \quad \text{IV.4.23}$$

$$\int_V \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} dv = \frac{1}{8 \pi G (1-\nu) R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z [2 t_r^2 - (3 - 4\nu)] I_6 d\theta \quad \text{IV.4.24}$$

Con ello queda finalizado la integración para T, siempre que se realice para los dos triángulos P B' C' y P A' C'.

- Matriz T'

Es necesario además el cálculo de las integrales correspondientes a las derivadas segundas de los movimientos.

Siguiendo un proceso totalmente análogo al anterior haciendo las mismas simplificaciones se puede obtener (vease apéndice II).

$$\int_V \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} dV = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ \frac{1}{2R} \left[ (11-4\nu) t_z^4 - 4 t_z^6 - \right. \right. \\ \left. \left. - (21/2 - 8\nu) t_z^2 - 1 \right] I_1 + \frac{1}{2R} \left[ (3-4\nu) t_z^2 - 2 t_z^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2t_r^2 - 1) t_z^2 \right] I_2 + R/2 \left[ (3-4\nu) t_z^2 - 2 t_z^4 + (2t_r^2 - 1) t_z^2 \right] I_3 + \right. \\ \left. + \left[ 4 t_z^2 - (3-4\nu) \right] t_r^2 I_4 - \frac{3-4\nu}{8R} I_5 \right] \quad \text{IV.4.25}$$

Las integrales anteriores están dadas en el apéndice 5. Observando éstas se deduce que en  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  aparece el mismo término  $\ln \frac{\epsilon}{4R}$  que tiende a infinito, cuando  $\epsilon$  tiende a cero, pero si se suman las contribuciones de las tres integrales y se integra entre 0 y  $2\pi$  se tiene para el  $\ln \epsilon$

$$\sqrt{R} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \left[ (3-4\nu) t_z^2 - 2 t_z^4 + (2t_r^2 - 1) t_z^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ (3-4\nu) t_z^2 - 2 t_z^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + (2t_r^2 - 1) t_z^2 \right] + \left[ 4 t_z^2 - (3-4\nu) \right] t_r^2 \right] d\theta \ln \frac{\epsilon}{4R} = \\ = R \ln \frac{\epsilon}{4R} \int_0^{2\pi} \left[ (3-4\nu) (t_z^2 - t_r^2) + 2 t_z^2 (t_r^2 - t_z^2) + (4t_r^2 - 1) t_z^2 \right] d\theta = 0$$

IV.4.26

Lo mismo ocurre en el resto de las integrales posteriores, por lo que no es problema eliminar los términos en  $\ln \epsilon$  que aparecen en la formulación de las integrales.

$$\int_V \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial Z} dV = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [t_r t_z (4t_z^2 - 5 + 4\nu)] (I_4 + R I_3) +$$

$$+ \frac{t_z}{2} [ (12 - 15) + (20 - 8\nu) t_z^2 - 8t_z^4 ] I_6 \quad \text{IV.4.27}$$

$$\int_V \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} dV = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ \frac{1}{2} R (8t_z^4 - 4t_z^2 - 1) I_2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} (8t_z^4 - 12t_z^2 + 3) I_4 + t_r / 4 (2t_z^2 - 1) I_6 + \frac{t_r}{4R} (-16t_z^4 +$$

$$+ 14t_z^2 - 1) I_{10} + \frac{1}{4} R (2t_z^4 - 4t_z^2 - 1) I_1 - \frac{1}{8} R I_5 \quad \text{IV.4.28}$$

$$\int_V \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial Z} dV = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)\sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z [ -2 (4t_z^2 - 3) t_r ] I_4 + \frac{1}{2} (2t_z^2 - 3) \cdot$$

$$\cdot I_6 \quad d\theta \quad \text{IV.4.29}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) dV = \frac{1}{8\pi G(1-\nu) R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{t_z t_r}{R} \cdot$$

$$\cdot (-5 + 4\nu + 6t_z^2) I_2 + t_r t_z (-7 + 4\nu + 8t_z^2) I_4 + 2t_r t_z^3 R I_3 + \frac{t_z}{4R} \cdot$$

$$\cdot [ (33 - 24\nu) + (16\nu - 49) t_z^4 + 16t_z^4 ] I_{10} + \frac{t_r}{4} (6t_z^2 - 1) I_6 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{t_r^3 R}{4} I_{12} + \frac{t_r t_z}{4R} (8t_z^4 - 4t_z^2 + 1) I_1 + \frac{t_z}{8R} (-2t_z^4 + 6t_z^2 - 3) I_{11} + \\
 & + \frac{3t_z}{4R^2} I_{15} + \frac{3t_z}{16R^2} I_{16} + \frac{t_r t_z}{4} I_{14} + \frac{3}{4} \frac{t_z}{R^2} I_{15} + \frac{3t_z}{16R^2} I_{16} ]
 \end{aligned}$$

IV.4.30

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial r r} + \frac{\partial U}{\partial z z} \right) dV &= \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} [(13-8\nu) - \\
 & - (44-16\nu) t_z^2 + 24t_z^4] I_4 + R/2 [8t_z^4 - 4t_z^2 - 1] I_3 + \frac{t_r}{4} [16t_z^4 - 10t_z^2 - \\
 & - 1] I_6 + \frac{t_r R}{4} [2t_z^2 - 1] I_{12} + \frac{1}{2} [-t_z^4 + 3t_z^2 + 9/2] I_{14} + 3/8 I_{18} ]
 \end{aligned}$$

IV.4.31

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial R} dV &= \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} t_z \left[ \frac{3t_z^2}{16R} I_{17} + \frac{2t_z^3 t_r}{R} I_2 + \right. \\
 & + 2t_z^3 t_r R I_3 + 2t_z t_r (2t_z^2 - 1) I_4 + \frac{t_z t_r}{4R} (8t_z^4 - 4t_z^2 - 5) I_1 + \\
 & \left. + \frac{t_z}{4R} (3 - 7t_z^2) I_{10} + \frac{t_z^3 R}{4} I_{12} + \frac{5t_z}{4} (2t_z^2 - 1) I_6 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\left[ -\frac{5t_z t_r}{4} I_{14} + \frac{2t_z^4 - 22t_z^2 - 3}{8R} I_{11} \right] \quad \text{IV.4.32}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial^2 U_{rz}}{\partial r \partial Z} dV &= \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta (4t_z^4 - 6t_z^2 + 3/2) I_4 - \\ &- (4t_z^4 - 2t_z^2 - \frac{1}{2}) R I_3 - t_r (4t_z^4 - 7/2 t_z^2 + 1/4) I_6 + \\ &+ t_r R (1/4 - \frac{1}{2} t_z^2) I_{12} - (2t_z^4 + 4t_z^2) I_{14} - 3/8 I_{18} \end{aligned} \quad \text{IV.4.33}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial R} dV &= \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ \frac{t_r t_z}{R} (-1 + 4\nu - 4t_z^2) I_2 + \right. \\ &+ t_r t_z (-1 + 4\nu - 4t_z^2) I_4 + \frac{t_z}{2R} [(3 - 12\nu) + 8(1 + \nu) t_z^2 - \\ &\left. - 8t_z^4] I_{10} \right] \end{aligned} \quad \text{IV.4.34}$$

$$\int_V \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} dV = \frac{1}{8\pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [(1-4\nu) + (4 + 8\nu) t_z^2 - 8t_z^4] I_4 \quad \text{IV.4.35}$$



$$\int_V \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U}{\partial z} r z + \frac{\partial U}{\partial r} z z \right) dV = \frac{1}{8 \pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ \frac{1}{4R} \left[ 8t_z^6 - \right. \right. \\ \left. \left. - (14 + 8\nu) t_z^4 + (3 + 16\nu) t_z^2 + 1 \right] I + \frac{t_r}{4R} \left[ -16t_z^4 + 6t_z^2 + 3 \right] I + \right. \\ \left. + \frac{t_r}{4} \left[ -2t_z^2 + 3 \right] I + \frac{1}{4R} \left( 24t_z^4 - (4 + 8\nu) t_z^2 + 4 \right) I + 1/4 \left[ 32t_z^4 - \right. \right. \\ \left. \left. - (28 + 16\nu) t_z^2 - (6 + 16\nu) \right] I + R/4 \left[ 8t_z^4 - 8\nu t_z^2 + 2 \right] I - \frac{1-2}{4R} I \right]$$

IV.4.36

$$\int_V \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} r z + \frac{\partial U}{\partial r} z z \right) dV = \frac{1}{8 \pi G (1-\nu) \sqrt{R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \left[ .3+4 -12t_z^2 \right] . \\ . t_r t_z I_4 + [1 + 4 - 4t_z^2] t_z t_r I_3 + [ (2 + 6 ) - (7 + 4 ) t_z^2 + 4t_z^4 ] I_6$$

IV.4.37

## V.- RESULTADOS

### V.1.- CUBO SOMETIDO A TRACCION

En este ejemplo se pretende analizar un cubo de arista 6 cm, sometido a carga uniforme de tracción sobre sus dos caras opuestas de valor  $1000 \text{ kg/cm}^2$ . Naturalmente, estos valores son totalmente irreales, para un problema elástico, pero tienen la ventaja de que los resultados son fácilmente visualizables. La Fig. V.1.1 representa lo indicado.

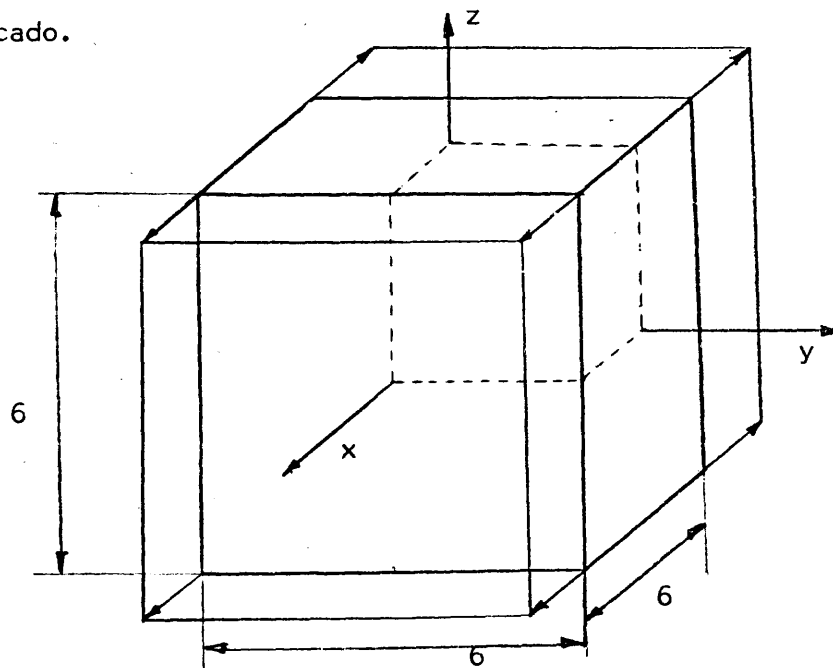


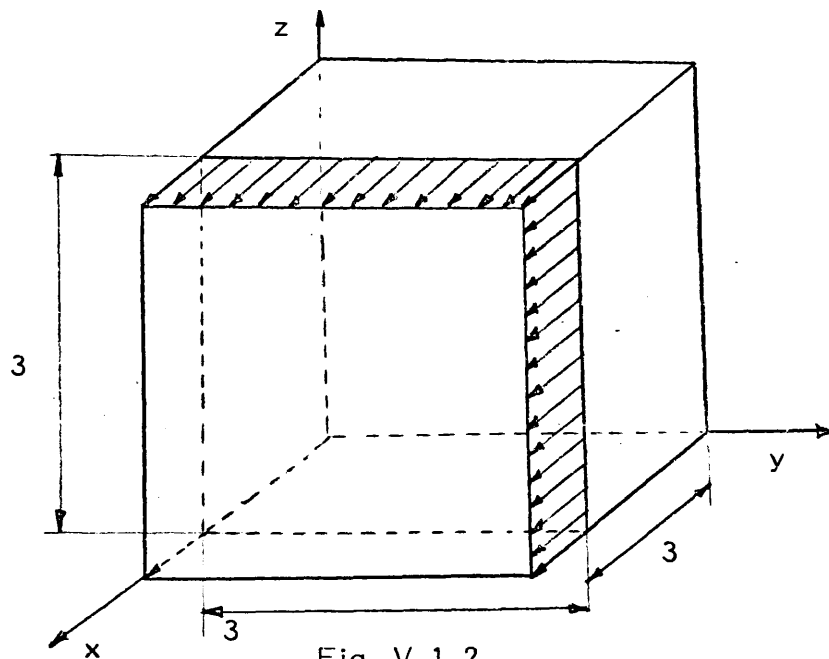
Fig. V.1.1

Se va a considerar un material que tiene de modulo de elasticidad  $E = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y de coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ .

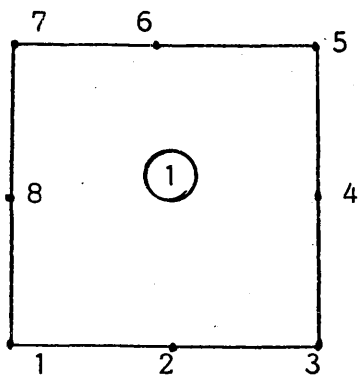
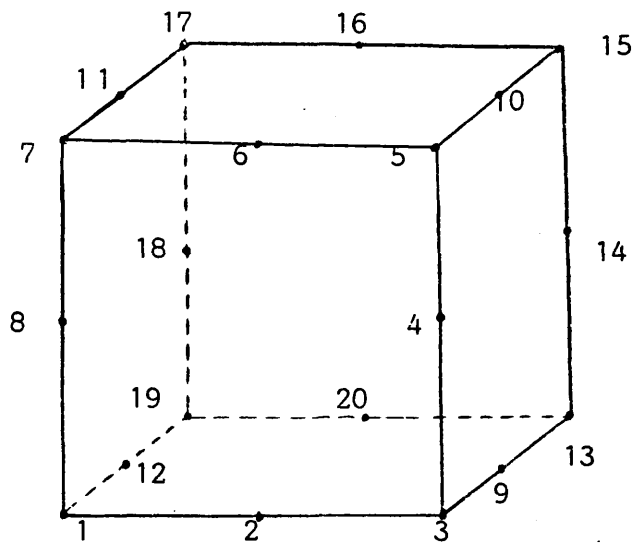
Debido a la simetría respecto a los planos  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$ , se sabe que los desplazamientos de puntos de estos planos respecto a las direcciones perpendiculares a

los mismos son nulos por lo que se puede fácilmente introducir estos datos como condiciones de contorno de un octante de cubo, eliminando así la posibilidad de movimiento como sólido rígido del dominio.

Se analiza por tanto el cuerpo que indica la Fig. V.1.2



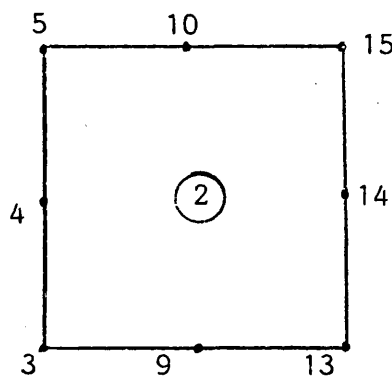
El problema se va a abordar con elementos de discretización rectangulares y triangulares. La discretización y condiciones de contorno para ambos casos, aparecen representadas en las Figs. V.1.3 y V.1.4 respectivamente.



$$\sigma_x = 1000.$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

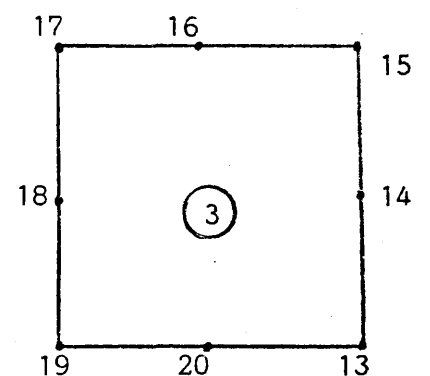
$$\tau_{xz} = 0.$$



$$\sigma_y = 0.$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

$$\tau_{yz} = 0.$$



$$u = 0.$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

$$\tau_{xz} = 0.$$

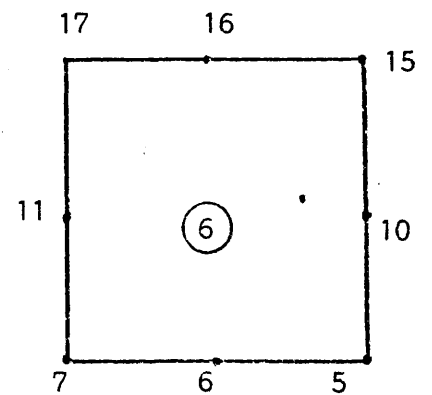
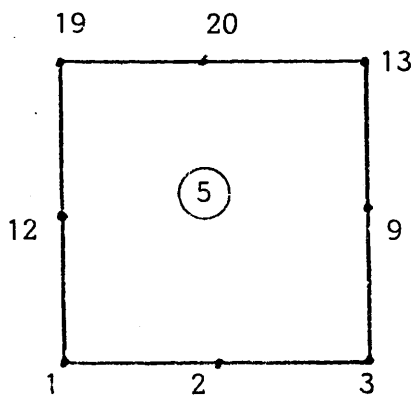
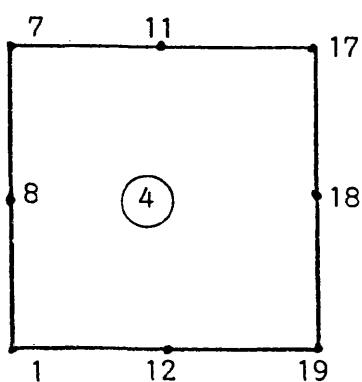


Fig. V.1.3

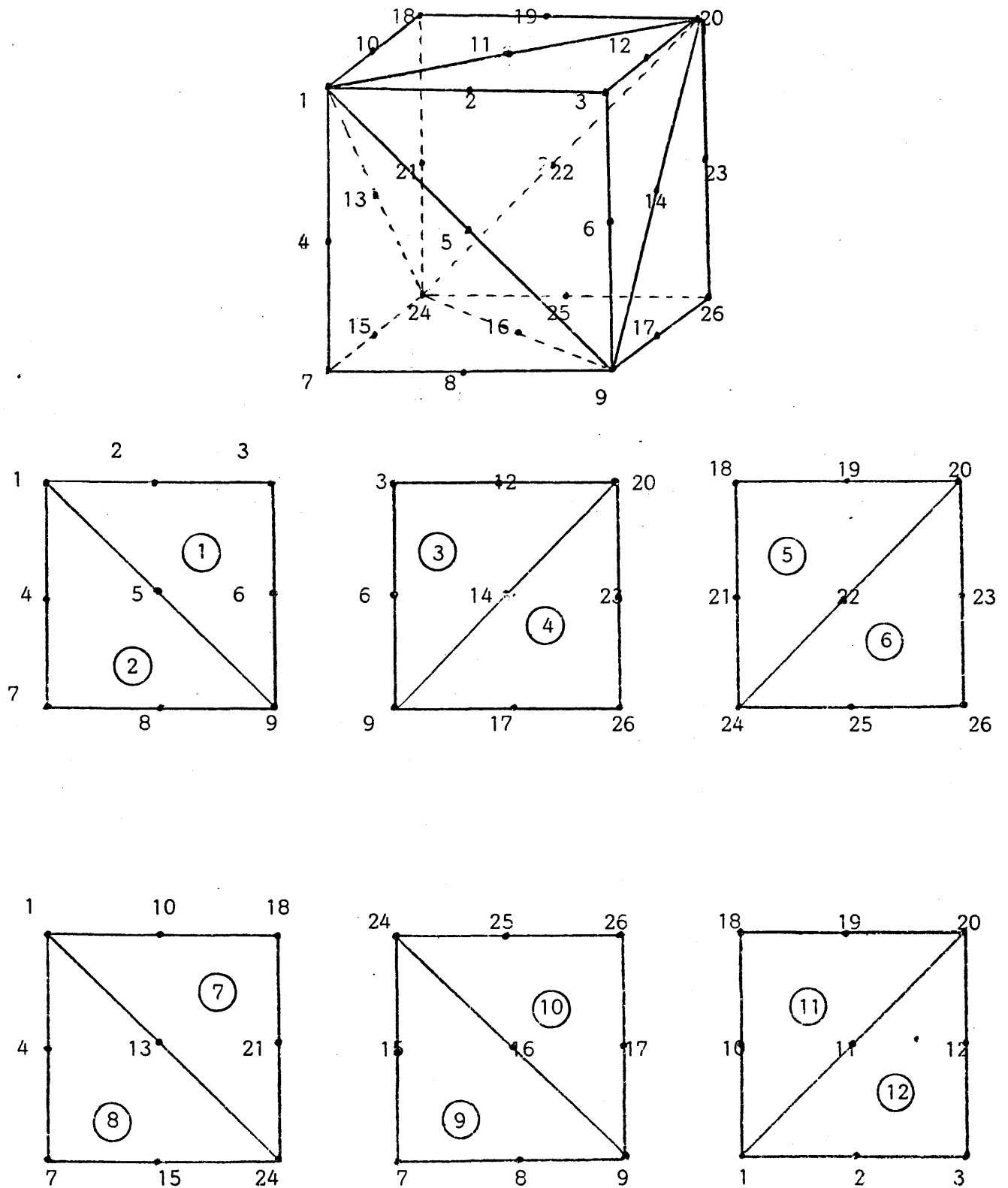


Fig. V.1.4

## RESULTADOS

V.1

En cuanto a tensiones, refiriéndonos de nuevo al caso de discretización en rectángulos, la solución teórica corresponde a la siguiente:

ELEMENTO 1	$\sigma_x = 1000$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
ELEMENTO 2	$\tau_{xy} = 0$	$\sigma_y = 0$	$\tau_{yz} = 0$
ELEMENTO 3	$\sigma_x = -1000$	$\tau_{xy} = 0$	$\tau_{xz} = 0$
ELEMENTO 4	$\tau_{xy} = 0$	$\sigma_y = 0$	$\tau_{yz} = 0$
ELEMENTO 5	$\tau_{xz} = 0$	$\tau_{yz} = 0$	$\sigma_z = 0$
ELEMENTO 6	$\tau_{xz} = 0$	$\tau_{yz} = 0$	$\sigma_z = 0$

Las dos soluciones obtenidas con el programa PECET para las discretizaciones anteriormente definidas, se van a comparar también con las obtenidas con el programa MASCA (ver ref [100] y [101]). Este programa de elementos de contorno utiliza triángulos planos con evolución constante de tensiones y movimientos sobre ellos. El programa trabaja exclusivamente en memoria principal por lo que el campo de aplicación resulta bastante limitado.

La discretización utilizada para este programa ha sido la siguiente.

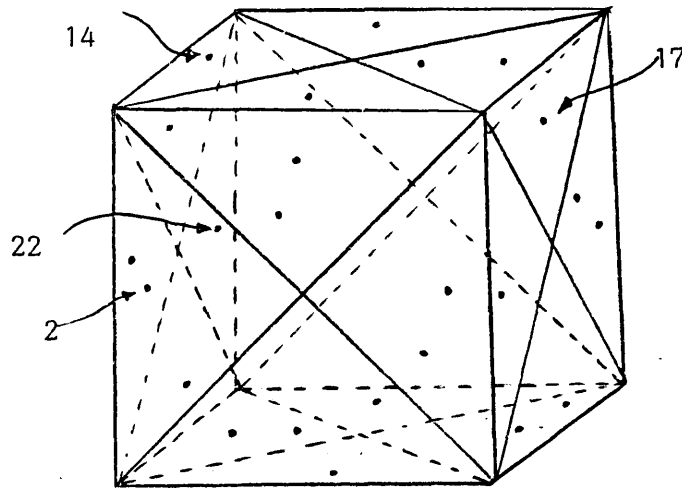


Fig. V.1.5

En las condiciones de carga especificadas, la solución es la correspondiente a una barra sometida a esfuerzo axial, es decir:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

Los movimientos por tanto serán:

$$u = \epsilon_x x \quad v = \epsilon_y y \quad w = \epsilon_z z$$

ya que los condicionantes de contorno son  $u = 0$  para  $x = 0$ ;  $v = 0$  para  $y = 0$ ;  $w = 0$  pa

RESULTADOS

V.1

ra  $z = 0$ . Por ello la tabla de movimientos completa, referida a la discretización con rectángulos es:

NODO	u	v	w
1	1.200	0	0
2	1.200	- 100	0
3	1.200	- 300	0
4	1.200	- 300	- 100
5	1.200	- 300	- 300
6	1.200	- 150	- 300
7	1.200	0	- 300
8	1.200	0	- 150
9	600	- 300	0
10	600	- 300	- 300
11	600	0	- 300
12	600	0	0
13	0	- 300	0
14	0	- 300	- 150
15	0	- 300	- 300
16	0	- 150	- 300



RESULTADOS

V.1

NODO	u	v	w
17	0	0	- 300
18	0	0	- 150
19	0	0	0
20	0	- 150	0

Los resultados comparativos obtenidos son:

VAR	SOLUCION	PECET.RECT.		PECET. TRIAN.		MASCA	
	EXACTA	Nod/Ele	Valor	Nodo	Valor	Ele.	Valor
u	1200.	1	1200.	7	1221.	17	1226.
v	- 150.	2	- 150.	8	- 126.5		
$\sigma_x$	- 1000.	17/3	- 1000.	18/7	- 963.	22	-998.
$\sigma_y$	0	12/4	-.02162	15/11	52.98	2	- 20.
$\sigma_z$	0	3/5	.26	9/9	56.	14	- 10.

Puede observarse, como conclusión que hecha la interpolación parabólica, tanto usando cuadriláteros como triángulos, realizada por el grama PECET da muchos mejores resultados que la aproximación constante realizada en el programa MASCA, como era de esperar. Hay que recordar que en este sencillo ejemplo el campo de Movimiento es lineal y por tanto la aproximación parabólica lo representa exactamente, por ello, un solo elemento por cara ha sido suficiente para obtener excelentes resultados.

Fuede por otro lado observarse que la resolución, dentro de la aproximación parabólica, obtenida con los rectángulos es superior a la de los triángulos lo que debe implicarse al cálculo, en el proceso de integración, de datos como rectángulos degenerados, lo que produce cierta distorsión en los resultados, siendo necesario un refino superior en la malla para conseguir la misma precisión.

### V.2.- CILINDRO SOMETIDO A PRESION INTERNA

Se va a analizar un cilindro de pared gruesa, sometido a presión interna de valor  $1000 \text{ Kg/cm}^2$ . Las dimensiones del cilindro son: radio exterior 110 cm y radio interior 30 cm.

El análisis se va a realizar en primer lugar considerandolo como un ejemplo tridimensional al que aplicaremos el programa PECET. En segundo lugar se hará el análisis como un caso axisimétrico mediante el programa AXIE.

La solución teorica a este caso de elasticidad plano, puede obtenerse, por ejemplo, en ref. (52), Pág. 297 como:

$$u_r = \frac{1-2\nu}{E} \frac{p a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_r = -\frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_t = -\frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

siendo  $a$  = radio interior del cilindro.

$b$  = radio exterior del cilindro.

V.2.1.- ANALISIS COMO DOMINIO TRIDIMENSIONAL

Por considerarse un cilindro indefinido, corresponde a un caso de deformación plana, por lo que no existe desplazamiento según el eje  $z$ . Esta situación se simula mediante la introducción de esta condición de contorno en los elementos perpendiculares a la dirección del eje del cilindro. La Fig. V.2.1.1 muestra el tipo de cilindro considerado.

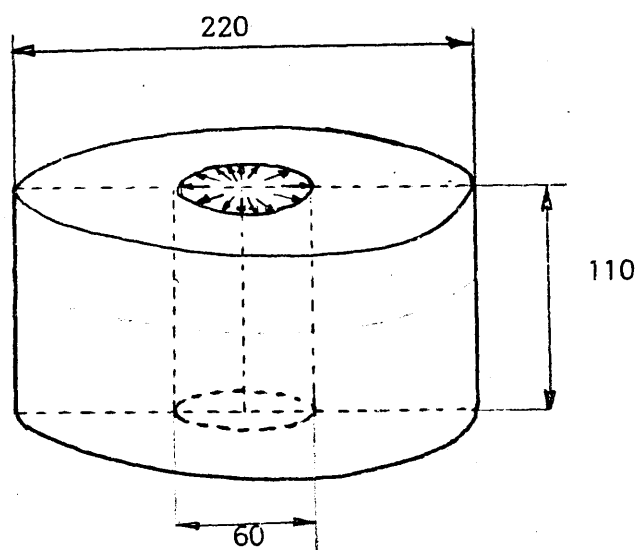


Fig. V.2.1.1

Debido a la simetría respecto a los planos  $xz$  e  $yz$ , los desplazamientos perpendiculares a estos planos en los puntos que pertenezcan a ellos deben ser nulos, por lo que introduciendo también esas condiciones en movimientos, el problema real que resolvemos en el programa es el que se indica en la Fig. V.2.1.2.

La discretización de nodos y elementos usada es la siguiente. Fig. V.2.1.3

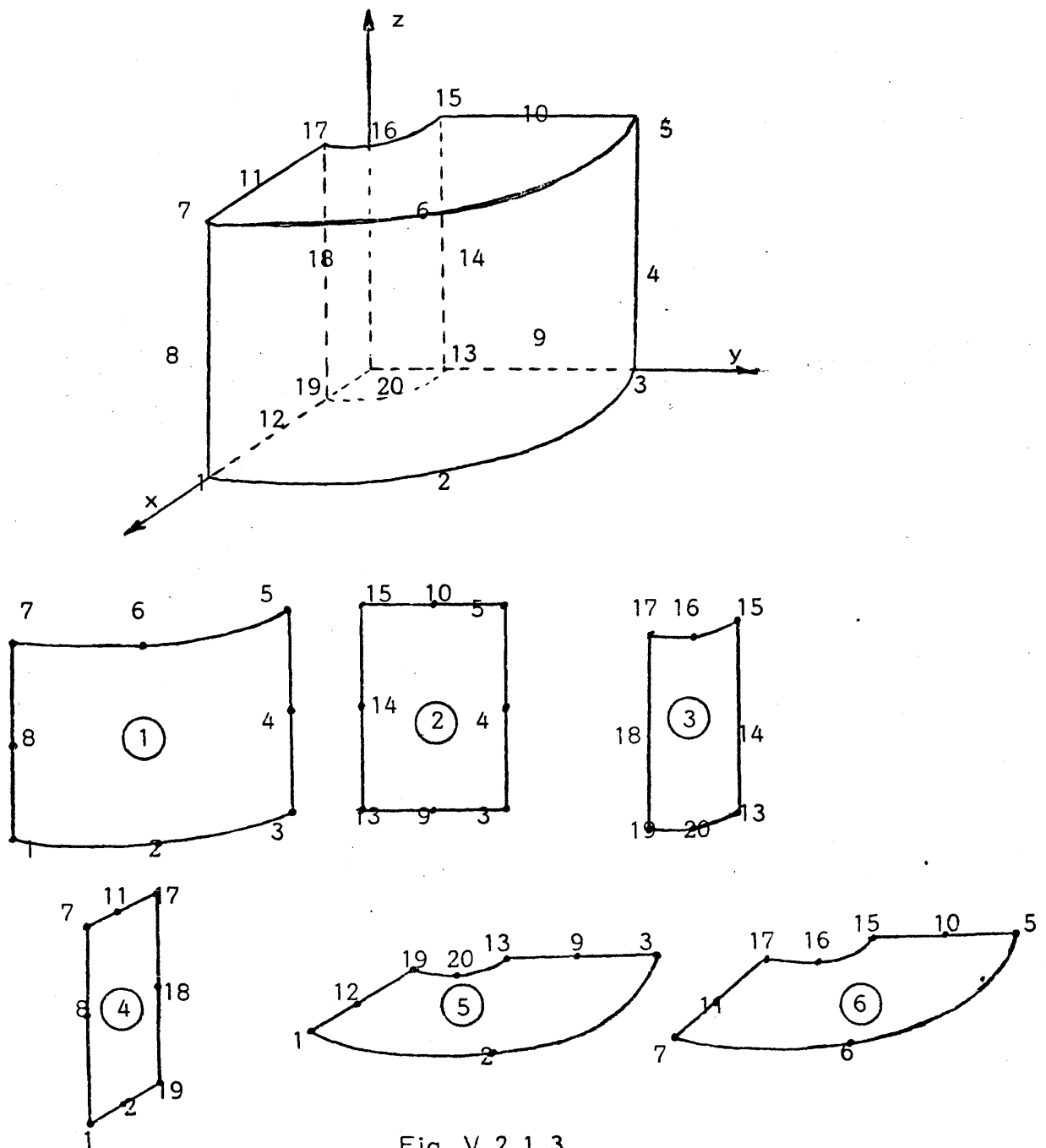


Fig. V.2.1.3

## RESULTADOS

## V.2

---

Los movimientos radiales para los diferentes nodos de la discretización, según la solución analítica anteriormente expuesta es:

$$u_r \text{ (nodos 1 a 8) } = 6187,5$$

$$u_r \text{ (nodos 9 a 12) } = 8070,15$$

$$u_r \text{ (nodos 13 a 20) } = 16687,5$$

(Se han supuesto los mismos valores E y  $\nu$  que en el ejemplo V.1)

Para las tensiones se tendrá:

$$\sigma_t \text{ (nodos 1 a 8) } = 0160,71 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_t \text{ (nodos 9 a 12) } = 278,79 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_t \text{ (nodos 13 a 20) } = 1160,71 \text{ Kg/cm}^2$$

Se especifica sólo  $\sigma_t$  pues es la que se corresponde directamente con los resultados del programa.

A continuación se incluye una tabla resumen con los resultados de algunos nodos en movimiento y tensiones así como el error cometido.

RESULTADOS

V.2

NODO	VARIABLE	TEORIA	PECET	ERROR %
7	$u_r$	6187.5	6249.	0.99
8	$u_r$	6187.5	6336.	2.4
11	$u_r$	8070.15	7850.	- 2.72
17	$u_r$	16687.5	15920.	- 4.59
18	$u_r$	16687.5	16090.	- 3.58
7	$\sigma_t$	160.71	165.9	3.2
11	$\sigma_t$	278.79	262.7	- 5.77
17	$\sigma_t$	1160.	1030.	- 11.2
8	$\sigma_t$	160.71	172.2	7.1
18	$\sigma_t$	1160.	1051.	9.39

### V.2.2.- ANALISIS COMO CASO AXISIMETRICO

Se ha resuelto también el problema anterior, considerando el cilindro como un sólido axisimétrico, indefinido, y por tanto con deformación nula en la dirección  $z$  - (definición plana). Como consecuencia de ello se ha considerado una situación de condiciones de contorno análoga a la anterior, es decir se suponen nulos los desplazamientos de las secciones extremas perpendiculares al eje  $z$ , en esta dirección.

Las características del material, así como las dimensiones y el valor de la presión interna se han considerado idénticas a las del ejemplo V.2.1 con el objeto de comparar.

En cuanto a la discretización se han efectuado ensayos con 3 discretizaciones = diferentes correspondientes a 40, 80 y 100 elementos con aproximación constante. Dichas discretizaciones se muestran a continuación, así como la situación de los nodos - que van a servir de comparación.

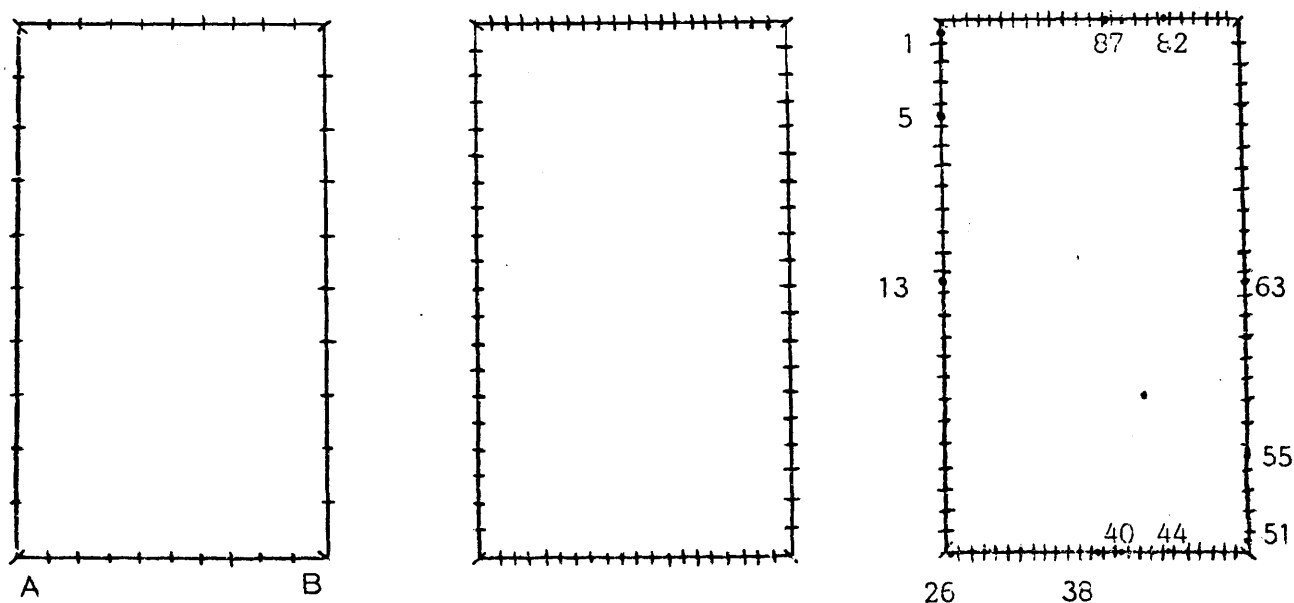


Fig V.2.2.1



RESULTADOS

V.2

NODO	VARIABLE	TEORIA	AXIE (100)	ERROR AXIE %
1	$u_r$	16687.5	17145.5	2.7
5	$u_r$	16687.5	16599.4	- 0.7
13	$u_r$	16687.5	15963.	- 4.3
1	$u_z$	0	125.534	
5	$u_z$	0	270.0	
13	$u_z$	0	-0.71	
26	$u_r$	15892.7	16993.9	6.9
38	$u_r$	7701.62	7687.5	- 0.1
51	$u_r$	6187.5	5907.87	- 4.5
55	$u_r$	6187.5	5890.91	- 4.7
63	$u_r$	6187.5	5708.11	- 7.7
40	$\sigma_z$	- 40.18	- 37.10	7.6
44	$\sigma_z$	- 40.18	- 41.83	- 4.1
82	$\sigma_z$	40.18	41.77	4.0
87	$\sigma_z$	40.18	37.07	- 7.7

Asimismo puede hacerse un estudio de comparación entre las distintas discretizaciones utilizadas, para lo cual se reflejará la variación de movimiento radial a lo largo de la línea A B de la Fig.

RESULTADOS

V.2

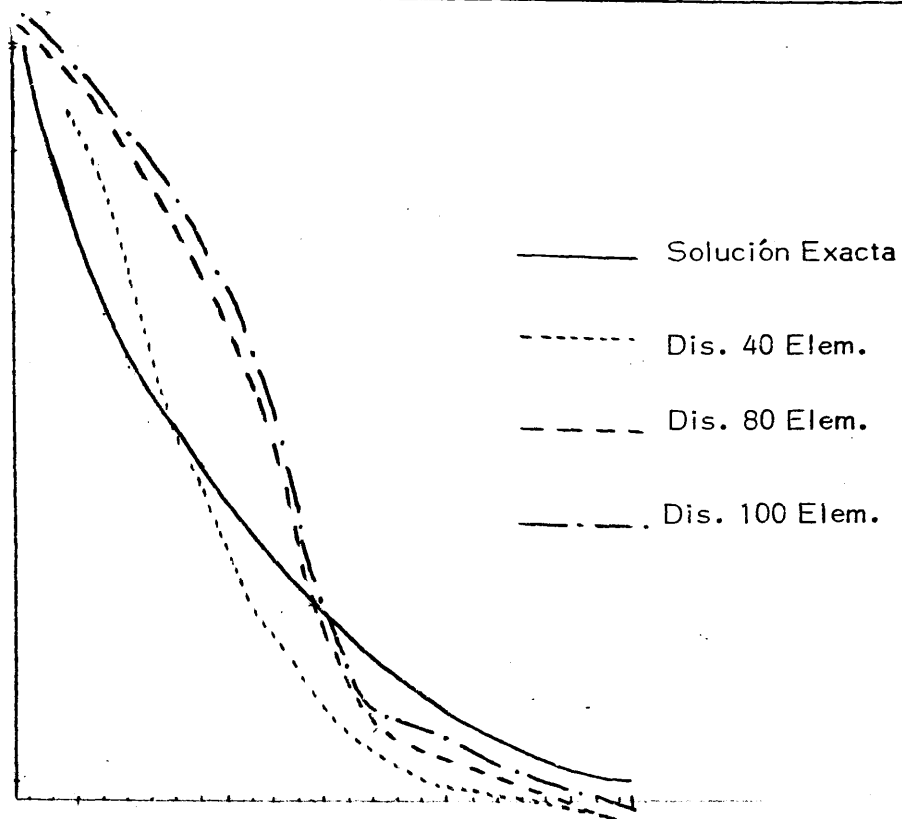


Fig. V.2.2.2

Es preciso hacer notar la diferencia apreciable en lo que se refiere a movimientos en la dirección  $z$ . Esta diferencia es debida a que la modelación del estado de deformación plana no es perfecta con las condiciones de contorno que se han introducido, sino que al permitirse el desplazamiento en esta dirección, debido al efecto Poisson, éste se produce.

Este hecho tiene como consecuencia el que la deformada tenga una apariencia distinta a la esperada en deformación plana (Fig. V.2.2.1) pero totalmente de acuerdo con las condiciones de contorno que se imponen.

Este efecto produce también un cambio en los valores de la tensión  $\sigma_z$  que es realmente apreciable.

Es también importante resaltar el hecho de que una mejor discretización no modifica sustancialmente los resultados siendo suficiente con la primera de ellas para conseguir resultados suficientemente precisos.

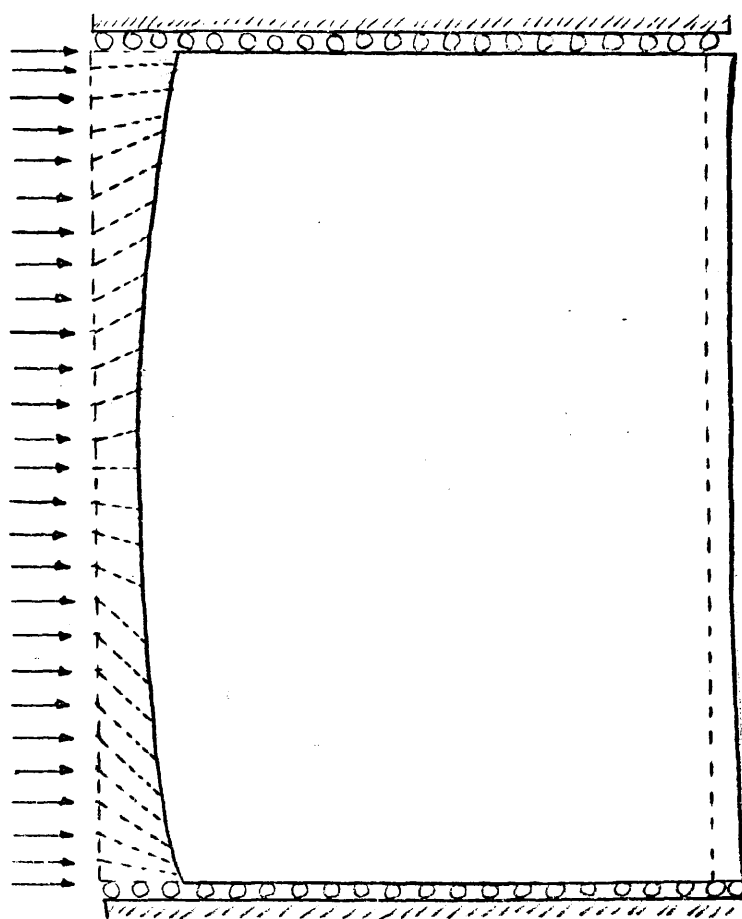


Fig.V.2.2.3

### V.3.- ESFERA SOMETIDA A PRESION INTERNA

Como un ejemplo de la capacidad del programa para resolver problemas de gran dimensión, así como de la aproximación que los elementos parabólicos consiguen en la representación de la geometría de un sólido de gran curvatura, se ha resuelto un problema tipo muy conocido como es la esfera sometida a presión interna.

Este problema posee solución exacta y viene definida por las expresiones siguientes (vease [ 52 ]).

$$u_r = \frac{1}{3\lambda+2G} \left[ \frac{pa^3}{b^3a^3} r + \frac{p_i}{46} \cdot \frac{a^3b^3}{b^3a^3} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$u_\theta = u_\phi = 0$$

$$\sigma_r = \frac{p_i a^3 (b^3 - R^3)}{R^3 (a^3 - b^3)} \quad \sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{p_i a^3 (2R^3 + b^3)}{2 R^3 (b^3 - a^3)}$$

La primera discretización que se pensó aprovechando los excelentes resultados conseguidos en el ejemplo V.2.1 con una discretización muy grosera fue la que se representa en la Fig. V.3.1 de solo 6 elementos, donde se aprovechó el hecho de que  $u_\theta = u_\phi = 0$  y se realizó un corte en la esfera mediante una superficie cónica consiguiendo una cara  $\theta = 0$  y por tanto un movimiento nulo perpendicular.

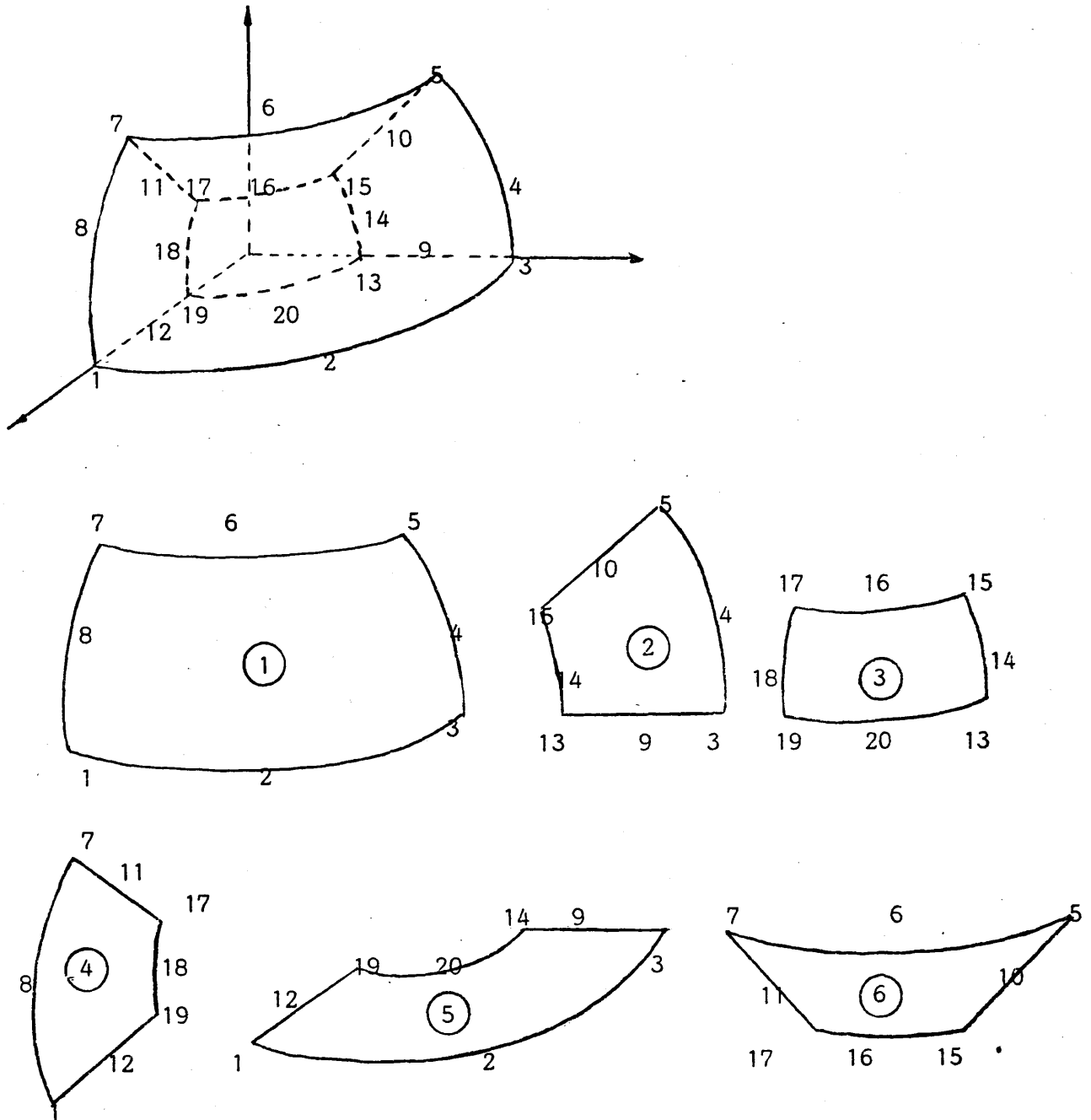


Fig.V.3.1

Introduciendo la condición de contorno pertinente se consiguieron malos resultados con errores del orden del 30 %. Este hecho es lógico ya que la geometría de los elementos es más complicada que en los ejemplos anteriores y como consecuencia queda peor aproximada.

Para salvaguardar este inconveniente se pensó otra discretización con 18 elementos y 36 nodos que representaban mucho mejor la geometría del sólido. El problema ahora consistía en las necesidades de memoria. Efectivamente el tamaño de la matriz del sistema de ecuaciones es de  $168 \times 168 \approx 29 \text{ K}$  palabras.

Para salvar este problema existen dos alternativas, la primera consiste en realizar una extensión de memoria a través de sentencias y órdenes de control apropiadas, y la segunda en utilizar una memoria reducida haciendo uso extensivo del método de las áreas buffer múltiples (vease anexo 1.3 ), con el consiguiente aumento de tiempo, que el ordenador utilizado es de gran importancia, debido a la ineficiencia en el tratamiento de los accesos a memoria auxiliar.

A pesar de ello se eligió esta posibilidad con el objeto de probar el método antedicho. Los resultados fueron excelentes en cuanto a necesidad de memoria (solo 6 K palabra para la matriz) pero lógicamente muy malos en cuanto a tiempo necesario. De hecho es de prever que en ordenadores de mayor capacidad y rapidez, y debido a la enorme flexibilidad del programa para su implementación en cualquiera de ellos, la eficiencia de éste aumente de forma notable.

La discretización utilizada, así como algunos resultados obtenidos se presentan a continuación.

RESULTADOS

V.3

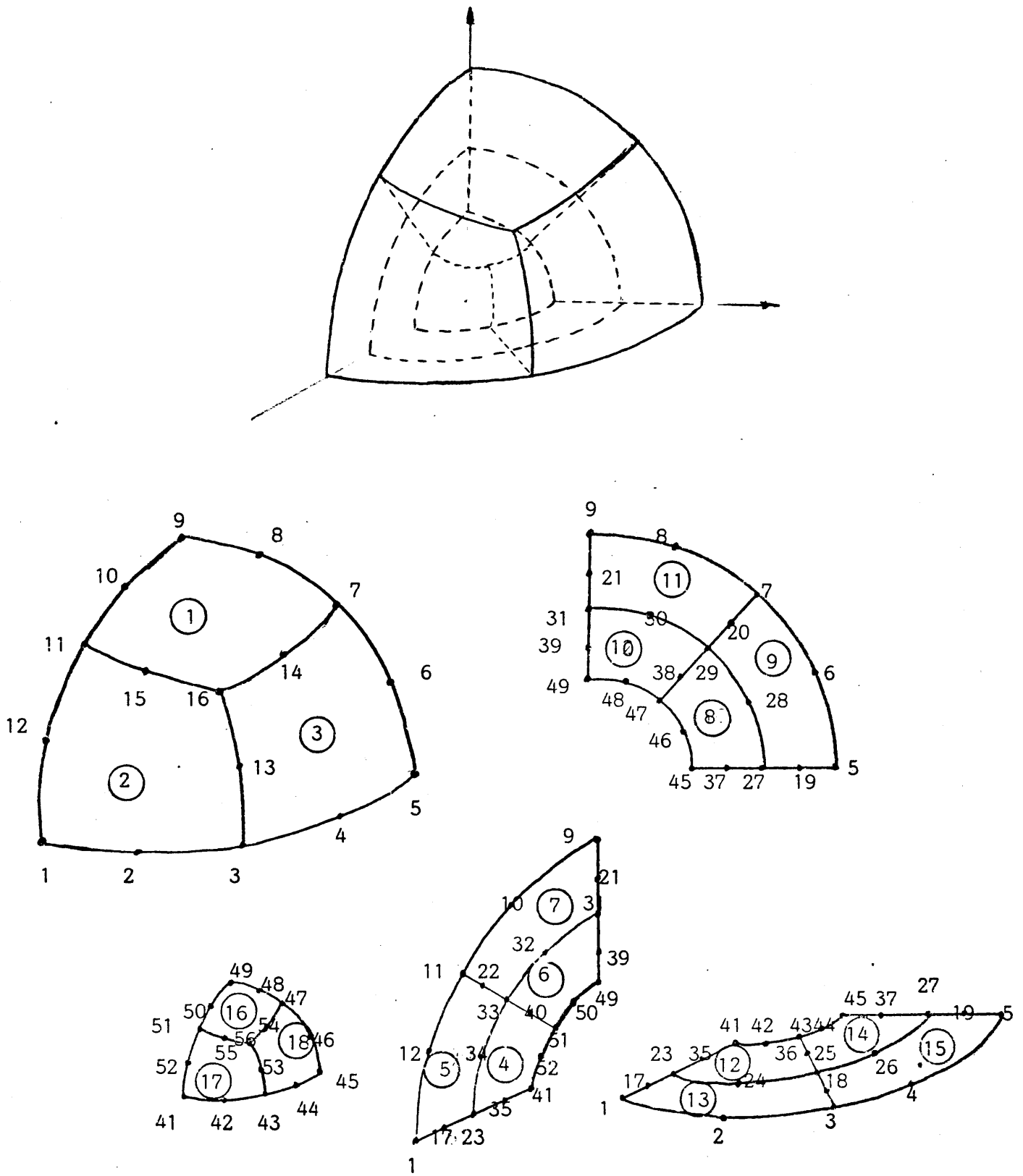


Fig. V.3.2

RESULTADOS

V.3

NODO	VARIABLE	TEORIA	PECET	ERROR %
1	$u_r$	6428.57	6401.	-0.43
17	$u_r$	7164.72	7109	-0.78
23	$u_r$	8492.06	8406.	-1.01
35	$u_r$	10928.57	10800.	-1.17
41	$u_r$	15714.29	15590.	- 0.79
1	$\sigma_t$	214.29	207.5	-3.17
17	$\sigma_t$	249.48	250.9	0.57
23	$\sigma_t$	312.17	303.9	-2.65
35	$\sigma_t$	435.43	433.5	-0.44
41	$\sigma_t$	714.29	757..	5.98



RESULTADOS

V.3

---

En cuanto a los tiempos que se necesitan para la realización del problema se presentan en la tabla adjunta.

Se concluye en definitiva que como en todos los grandes programas numéricos la capacidad y versatilidad están reñidas con el tiempo de ejecución, siendo necesario el uso de grandes ordenadores para que puedan aflorar todas las ventajas que el programa en sí conlleva.

TIEMPO TOTAL DE CPU	24 ' 50 ''
TIEMPO DE ENTRADA + SALIDA	34 ' 49 ''
TIEMPO DE ESPERA	2 ''
TIEMPO DE ACCESOS	6 ' 22 ''
TIEMPO TOTAL	66 ' 8 ''

#### V.4.- CUBO SOMETIDO A CARGAS DE TRACCIÓN EN PUNTOS INTERNOS

Con objeto de comprobar el tratamiento de fuerzas de volumen, se ha considerado un ejemplo correspondiente a un cubo sometido a cargas de anclaje en puntos internos.

Es de advertir que este ejemplo no tiene solución teórica, ni ha sido tampoco posible el realizar la comparación con otros métodos numéricos, por lo que se presenta sin realizar ninguna comparación. Sin embargo las características de los resultados permiten aventurar, si no asegurar, la fiabilidad de dichos resultados.

El problema consiste en el mismo sólido presentado en el ejemplo V.1 con las mismas condiciones de contorno salvo que no existe carga de tracción en la cara de lantera. Las cargas a las que está sometido son dos cargas concentradas, a modo de cables de anclaje, según indica la Fig. V.4.1 y de valor 1000.

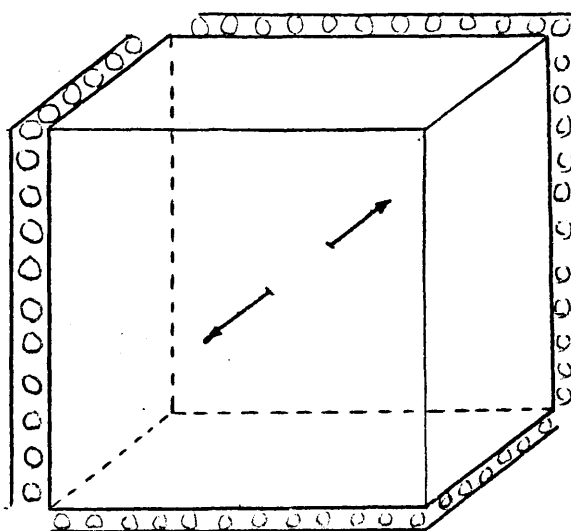


Fig. V.4.1

Los resultados correspondientes a movimientos y tensiones se presentan en la table adjunta para algunos de los nodos indicados en la discretización presentada en la Figura V.4.2

NODO	VARIABLE	PECET
1	u	625.2
9	u	0.000659
3	v	319.6
4	v	3059.

Asimismo, la deformada que resulta se presenta en la siguiente figura, pudiéndose observar el efecto de las cargas sobre la deformación de las caras laterales.

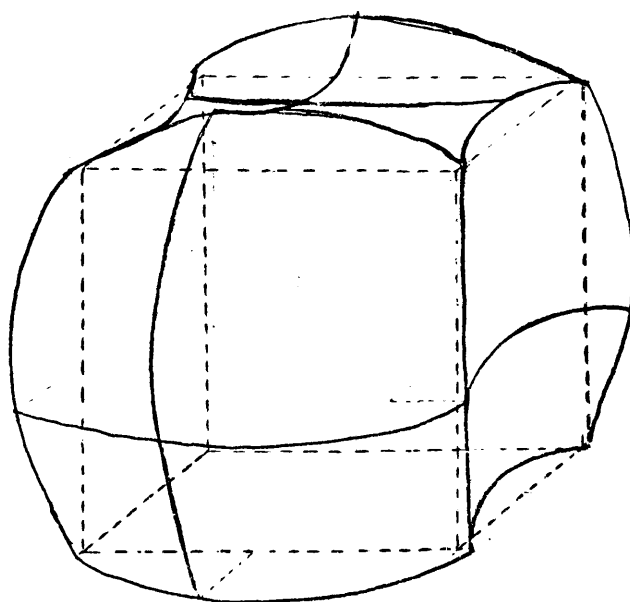


Fig. V.4.2

V.5.- MATERIAL HETEROGENEO SOMETIDO A TRACCION

Con objeto de comprobar la subregionalización en el programa se ha pasado un ejemplo con dos subregiones, correspondientes a un cubo sometido a tracción. La discretización es la que se muestra en la Fig. V.5.1 y las condiciones de contorno, situación y valores de las cargas son idénticos a los del ejemplo V.1

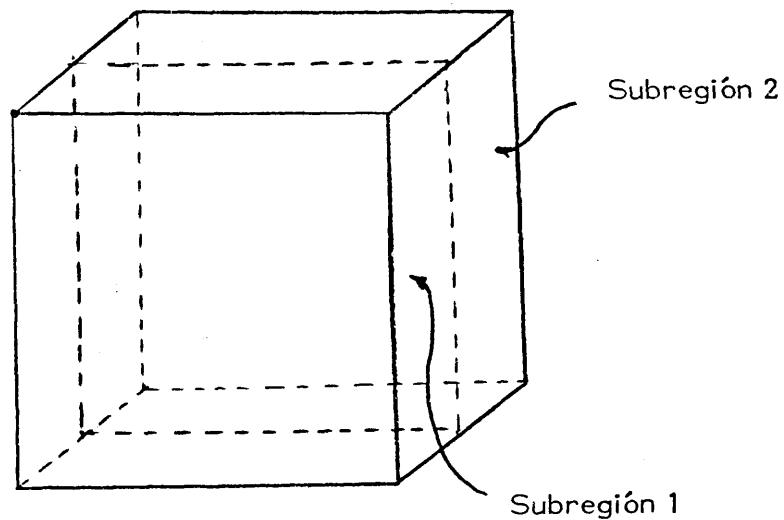


Fig. V.5.1

En principio y para comprobar la exactitud del método se supuso el mismo material en las dos subregiones. Las características de éste correspondían exactamente a las del problema V.1. Los resultados fueron totalmente satisfactorios. Efectivamente en todos los nudos se consiguió la solución exacta con errores inferiores al 0,1 % tanto en tensiones como en movimientos.

A continuación se pasó de nuevo el problema con dos materiales diferentes. El primero de características  $E = 5$  y  $\nu = 0,25$  y el segundo  $E = 1,5$   $\nu = 0,25$ .

La solución exacta de este problema puede obtenerse inmediatamente aplicando las relaciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase, teniendo en cuenta que  $\epsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E}$ , con lo que se puede obtener el movimiento  $u$ . Sin embargo los movimientos transversales en la iteración de materiales es muy complicado, esperándose un valor medio entre los correspondientes a los dos materiales.

Naturalmente el hecho de impedir el movimiento en las caras ocultas y la presencia de la interfase hace que se pierda la simetría original del problema. Asimismo la presencia de grandes desplazamientos transversales no uniformes hacen variar el resultado en movimientos y tensiones inicialmente previsto por la teoría elemental.

Sin embargo incluso en este caso se consiguen excelentes resultados con una discretización tan gruesa como la presentada. Algunos valores comparativos se muestran a continuación.

RESULTADOS

V.5

NODO	VARIABLE	TEORIA	PECET	ERROR %
3	u	900	917.9	1.99
3	v	- 300	- 298.7	0.43
10	u	600	626.1	4.35
10	v	- 300	- 264.8	11.72
14	u	300	292.8	- 2.40
15	v	$-\frac{300 + 150}{2}$	- 200.2	11.11
26	$\sigma_x$	- 1000.	- 935.6	6.44
31	$\sigma_x$	- 1000.	- 1096.0	9.60
1	$\tau_{xy}$	0	0.5	

Se observa claramente como el hecho de que las diferencias aumentan al acercarnos a la interfase, como una consecuencia directa de que la solución teórica no es exacta en sus proximidades.

### V.6.- ANALISIS DEL DOLO

El Dolo es un elemento de protección utilizado en estructuras marinas (diques), que consta de dos cabezas de martillo unidas por el mango y en direcciones perpendiculares. La Fig. V.6.1 muestra un esqema del mismo.

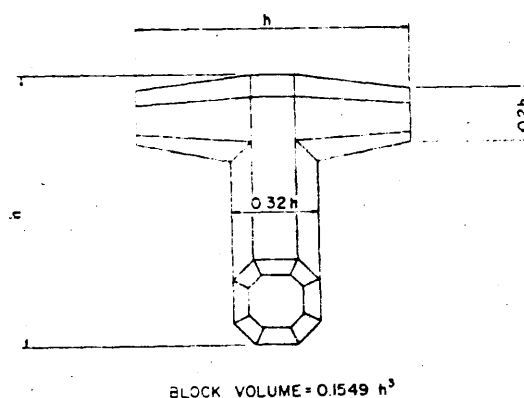


FIG. 1.—Dimensions of Dolos Unit

Fig. V.6.1

El cálculo de un dolo se lleva a cabo introduciendo una serie de simplificaciones en su sustentación y cargas que soporta, que en principio resultan difíciles de prever ya que un dolo puede ser golpeado accidentalmente por otros dolos que se desplazan durante una tempestad. Los elementos que constituyen un dolo tienen excelentes características para entrelazarse y por tanto, una hipótesis bastante común (Ref [ 39 ].) - es que el dolo queda firmemente empotrado a lo largo de una de las caras laterales de una de las cabezas según se indica en la Fig. V.6.2, en la que se ha representado esquemáticamente el dolo.

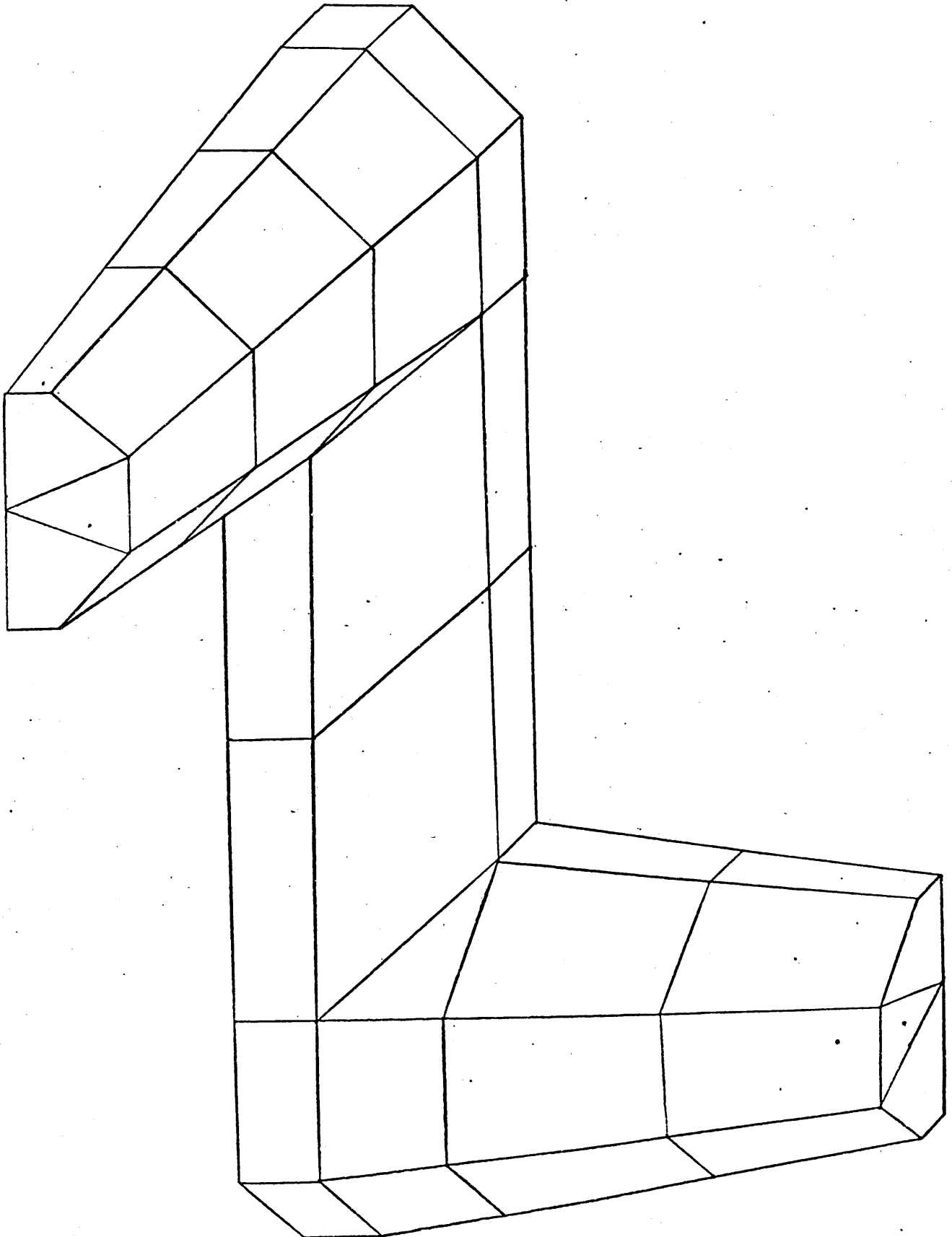


Fig.V.6.3



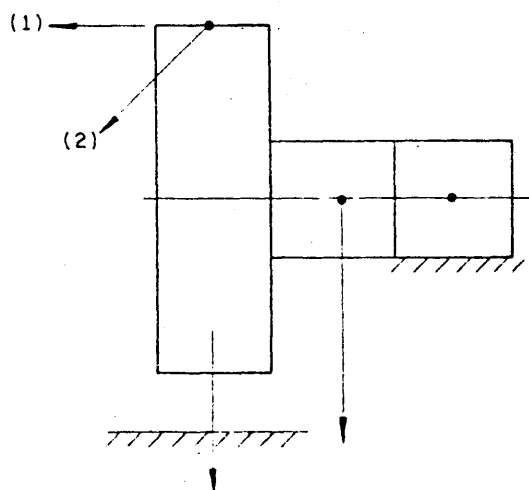


FIG. 3.—Dolos in Position as Shown (Slightly Uplifted) and Hit by Another Dolos Along One of Two Directions

Fig. V.6.2

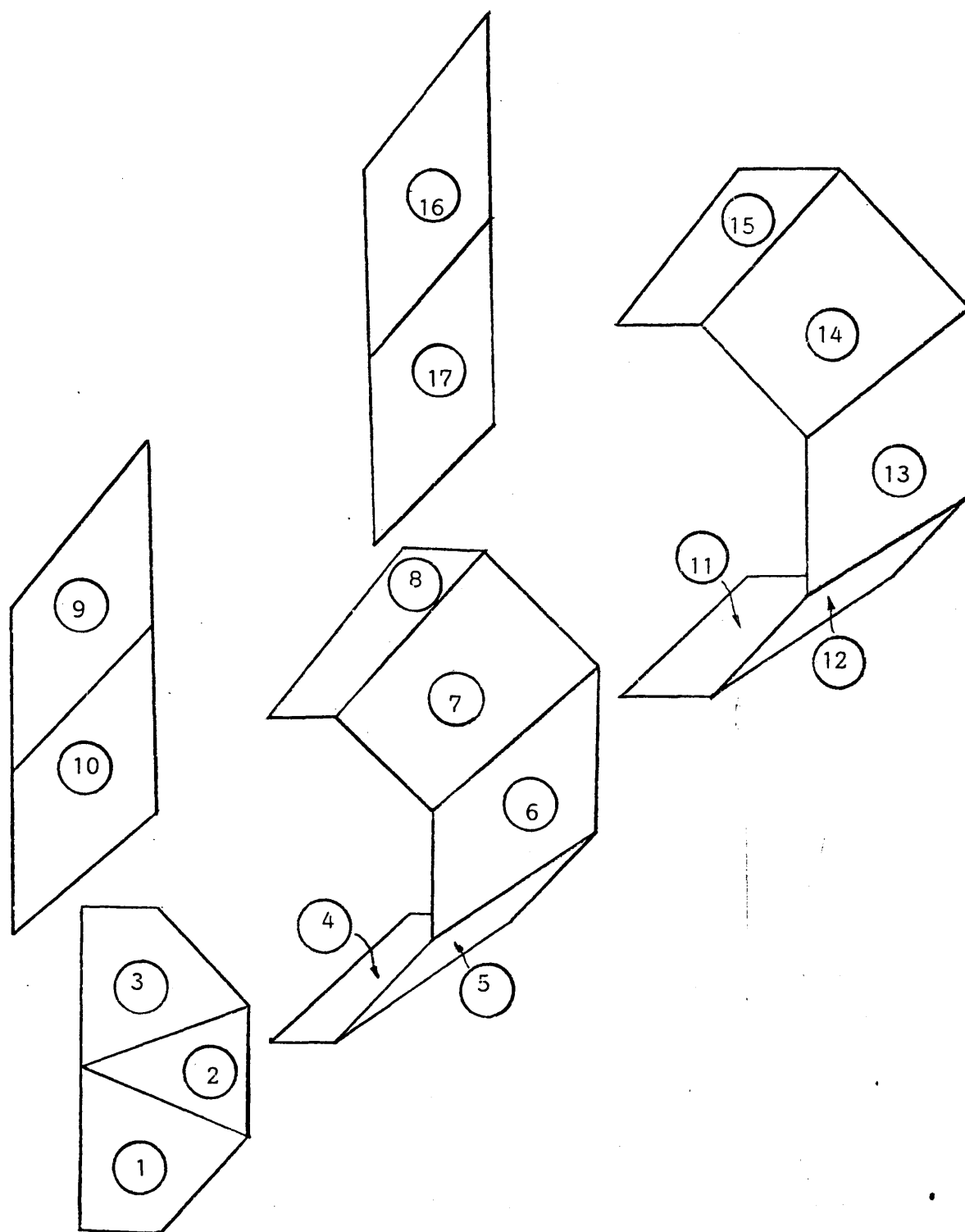
Supondremos que la parte central queda en posición horizontal, que la cabeza horizontal queda empotrada a lo largo de su cara lateral y la segunda cabeza, quedará en posición vertical, ligeramente elevada, por lo que no habrá reacciones sobre ella durante una tempestad, otros dolos pueden golpear el extremo superior de estos dolos, en cualquiera de las direcciones mostradas en la Fig. V.6.3.

Los esfuerzos originados por el propio dolo y las acciones exteriores han de ser resistidas por la cabeza conectada rigidamente al soporte. Las fuerzas que actúan sobre la sección serán:

- 1.- Peso del dolo.
- 2.- Momentos flectores debidos al cuerpo central y a la cabeza vertical .

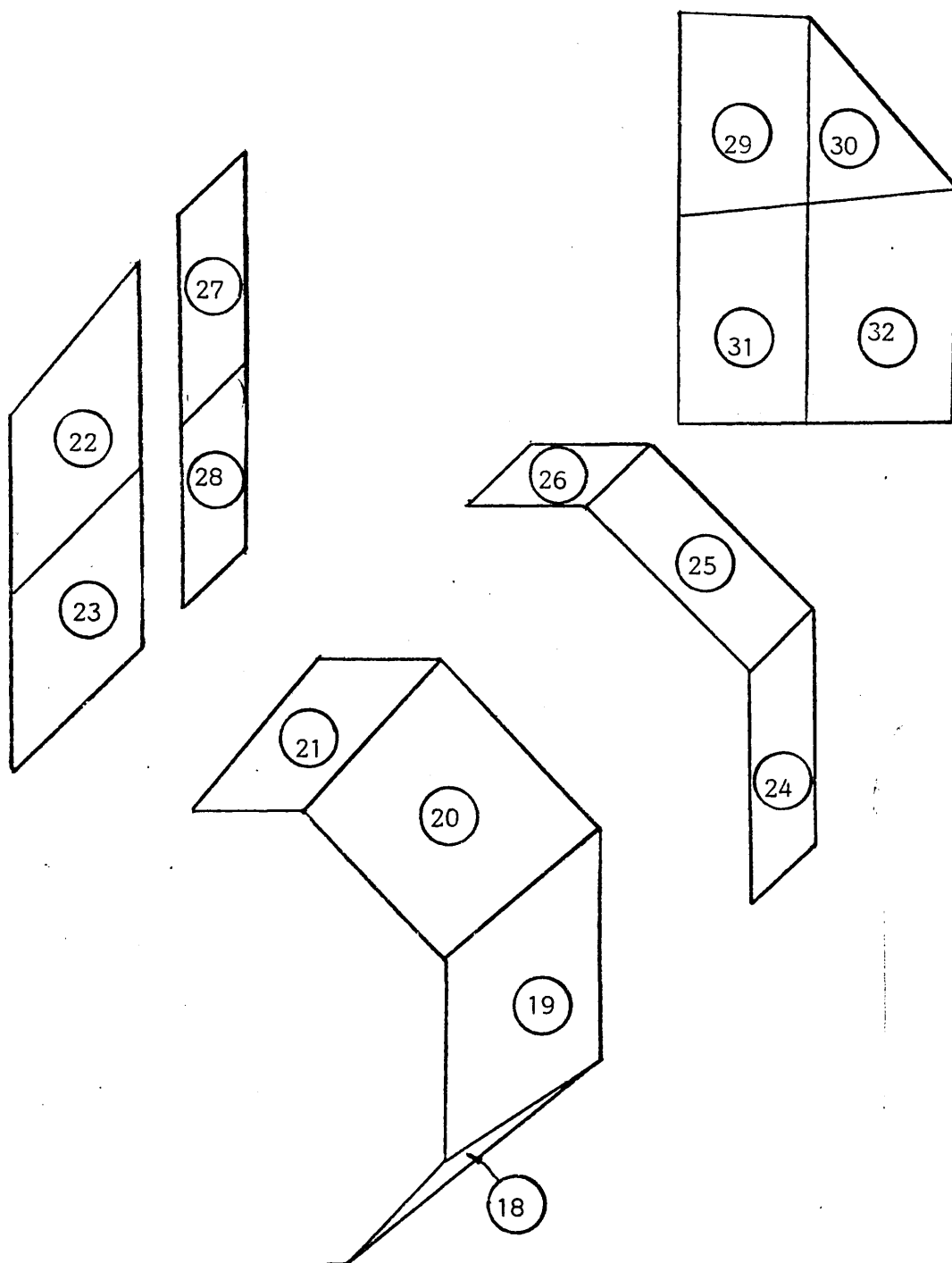
3.- Momentos flectores ó torsiones debido a los golpes de otros dolos.

Puesto que el dolo admite dos planos de simetría y la mayor parte de las cargas actuantes no alteran esta simetría, es posible estudiar la cuarta parte del dolo, cuya discretización se encuentra en las páginas siguientes. Finalmente se incluye una salida del programa con indicación de los nodos críticos resultantes de la discretización.



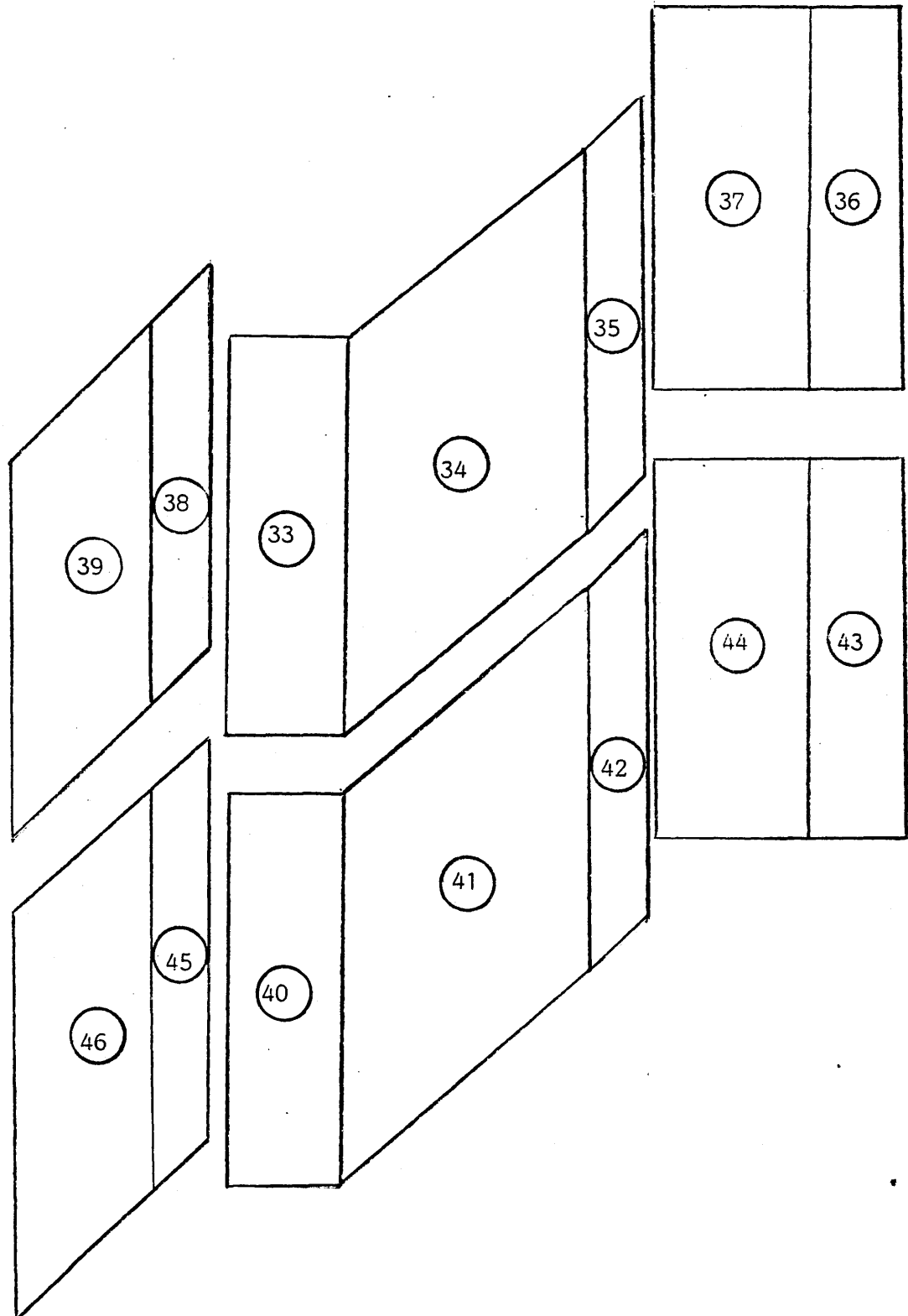
RESULTADOS

V . 6



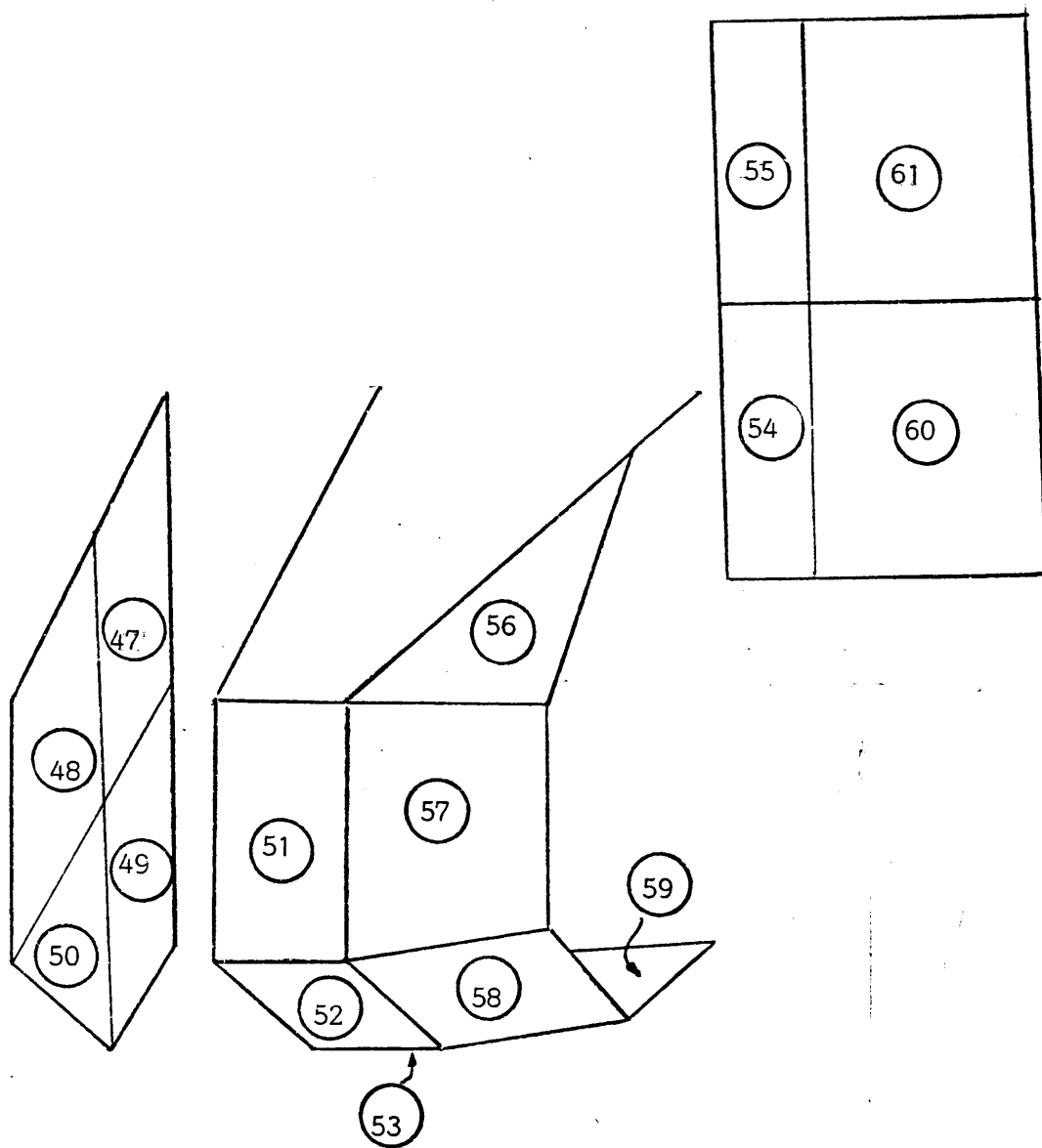
RESULTADOS

V.6



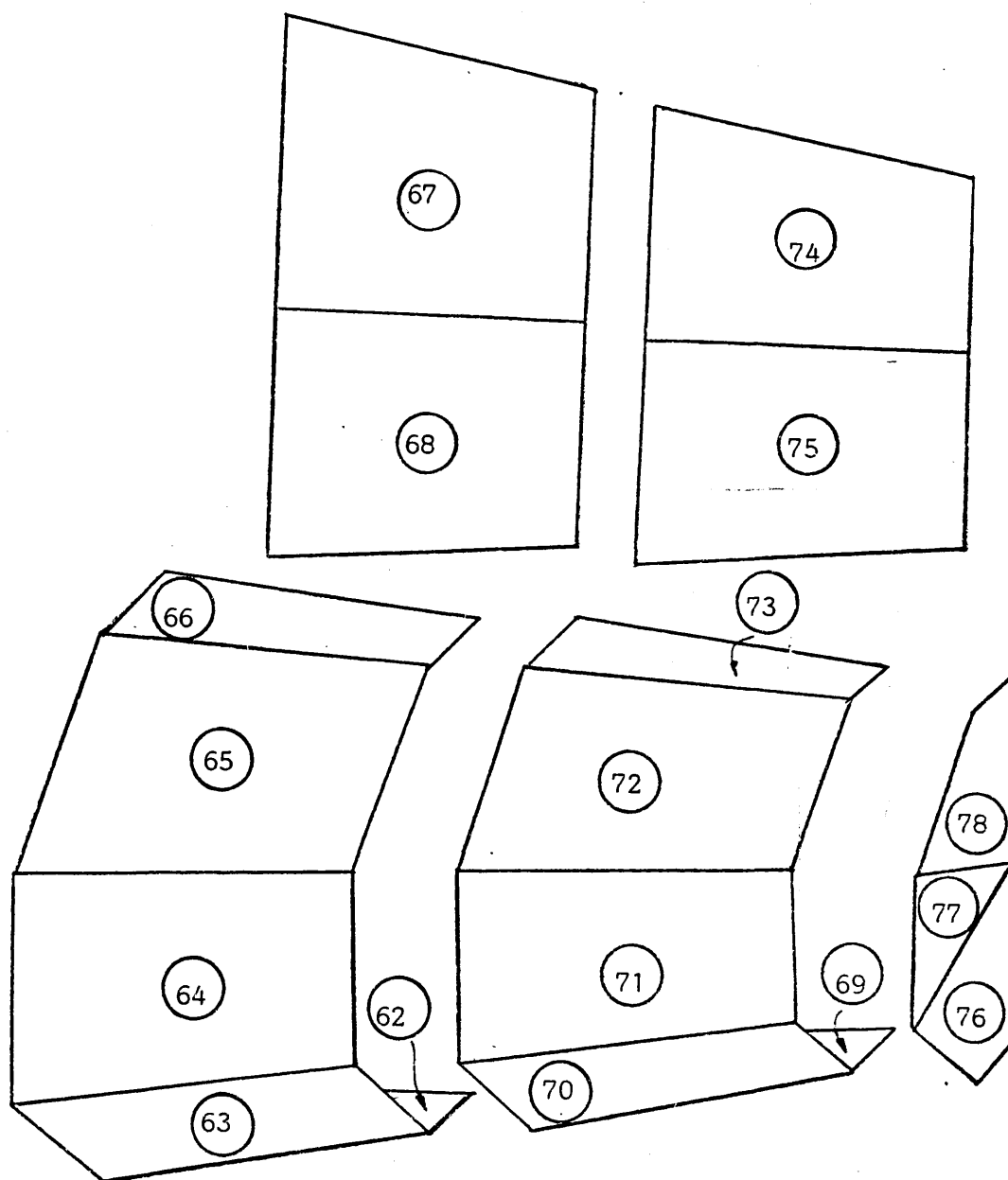
RESULTADOS

V.6



RESULTADOS

V.6



RESULTADOS

V.6

QPRNT  
360

\*\*\*\*\*CATALOGO DE NODOS CRITICOS\*\*\*\*\*

NODO NOCRI

1	1	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9950	.0000	.1003	.0000	.0000	113.0000
11	2	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9888	.0000	-.1495	.0000	.0000	113.0000
12	3	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9972	.0000	-.0754	.0000	.0000	113.0000
13	4	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
14	5	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9987	.0000	.0503	.0000	.0000	113.0000
17	6	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9572	.0000	.2874	.0000	.0000	113.0000
22	7	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9888	.0000	-.1495	.0000	.0000	113.0000
23	8	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
24	9	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9981	.0000	.0618	.0000	.0000	113.0000
34	10	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9890	.0000	-.1481	.0000	.0000	113.0000
35	11	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9972	.0000	-.0747	.0000	.0000	113.0000
36	12	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
37	13	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9987	.0000	.0508	.0000	.0000	113.0000
38	14	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9949	.0000	.1011	.0000	.0000	113.0000
43	15	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9890	.0000	-.1481	.0000	.0000	113.0000
44	16	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
45	17	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
55	18	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9965	.0000	-.0840	.0000	.0000	113.0000
56	19	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.7793	.0000	-.6266	.0000	.0000	113.0000
57	20	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
58	21	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9972	.0000	-.0749	.0000	.0000	113.0000
63	22	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.9965	.0000	-.0840	.0000	.0000	113.0000
64	23	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
65	24	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
72	25	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0856	.0000	.9963	.0000	.0000	113.0000
74	26	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
75	27	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
76	28	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
81	29	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
82	30	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
83	31	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.8551	-.5184	.0000	.0000	113.0000
84	32	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.8785	-.4777	.0000	.0000	113.0000
85	33	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9076	-.4198	.0000	.0000	113.0000
86	34	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.7071	.7071	.0000	.0000	113.0000
87	35	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.0000	1.0000	.0000	.0000	113.0000
88	36	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
89	37	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	-.0000	.0000	.0000	27.0000	223.0000
90	38	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	27.0000	223.0000
91	39	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	28.0000	223.0000
92	40	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	28.0000	223.0000
93	41	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	37.0000	223.0000
94	42	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	113.0000
95	43	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9381	-.3464	.0000	.0000	113.0000
96	44	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9076	-.4198	.0000	.0000	113.0000
97	45	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9076	-.4198	.0000	.0000	113.0000
98	46	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.8770	-.4805	.0000	.0000	113.0000
99	47	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9283	-.3718	.0000	.0000	113.0000
100	48	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9301	-.3673	.0000	.0000	113.0000
101	49	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.8535	-.5210	.0000	.0000	113.0000
102	50	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
105	51	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9760	-.2176	.0000	.0000	113.0000
106	52	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9560	-.2733	.0000	.0000	113.0000
107	53	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	37.0000	223.0000
108	54	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	-.0000	.0000	.0000	113.0000
109	55	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
115	56	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
116	57	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
117	58	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
118	59	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
119	60	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000	44.0000	223.0000
120	61	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
121	62	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
122	63	.0000	-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	113.0000
123	64	.0000	-1.0000	.0000	.0000	.7418	.0000	-.6707	.0000	.0000	113.0000
126	65	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9810	-.1940	.0000	.0000	113.0000
127	66	-1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	-.9244	-.3524	.0000	.0000	113.0000



DATA IGNORED - IN CONTROL MODE  
DESCRIPT PRINTS

### V.7.- CILINDRO CON FISURA

Con el objeto de calcular el factor de concentración de tensiones en un cilindro con una grieta se ha pasado este ejemplo, considerándolo como un caso axisimétrico, sometido a una carga axial de valor 1000, y con una fisura exterior de longitud igual a 1/3 del espesor del cilindro y evidentemente axisimétrica.

En un material con fisura, la distribución general de tensiones es del tipo (Brock 1978).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{r}} f_{oij}(\theta) + \sum_{n=1}^N r^{(n-1)/2} f_{nij} \quad \text{V.5.1}$$

expresión que representa un desarrollo en serie de potencias de la distancia  $r$  cuyos coeficientes dependen de la dirección considerada a través del ángulo.

La característica más destacada de este desarrollo es la existencia de un término singular en  $r^{-\frac{1}{2}}$ , que será el que domina la distribución de tensiones, para valores pequeños de  $r$ , es decir en las proximidades del borde de la fisura. En esa zona, por tanto, podrían despreciarse los restantes términos, con lo que las tensiones quedarían reducidas a

$$\sigma_{ij} = 1/\sqrt{r} f_{oij}(\theta) \quad \text{V.5.2}$$

Las funciones  $f_{oij}$  son universales y pueden verse por ejemplo en Valiente.

Centrándonos en el caso de un cilindro con grieta exterior (Fig.V.7.1) la distribución de tensiones en la dirección de la grieta queda

RESULTADOS

V.7

$$\sigma_z = K_1 / \sqrt{2\pi r} \quad \text{V.7.3}$$

donde  $K_1$  es el factor de concentración de tensiones que viene definido para este caso por Venthem y Koiter (1973), en la forma

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi (D - d)} \frac{1}{2\sqrt{2}} (d/D)^{-3/2} \left( 1 + \frac{1}{2} d/D + \frac{3}{8} (d/D)^2 - 0.363 (d/D)^3 + 0.731 (d/D)^4 \right) \quad \text{V.7.4.}$$

En el caso que nos ocupa los valores anteriores son:

$$d = 180 \quad D = 240 \quad = 1000$$

y aplicandolos a la expresión anterior se obtiene  $K_1 = 12436.2$ .

El cálculo mediante el método de los elementos de contorno se ha realizado con la discretización que se indica en la Fig. V.7.2 y los resultados pertinentes en la Fig. V.7.3.

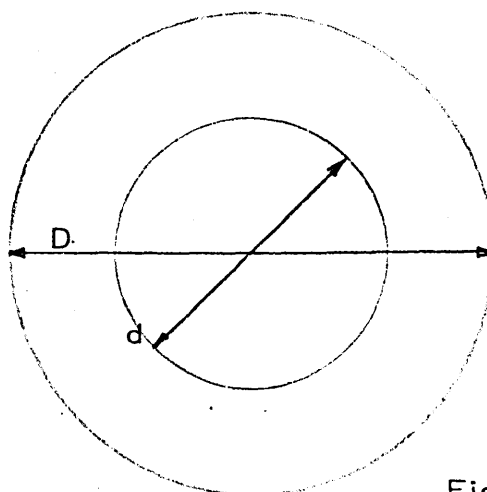
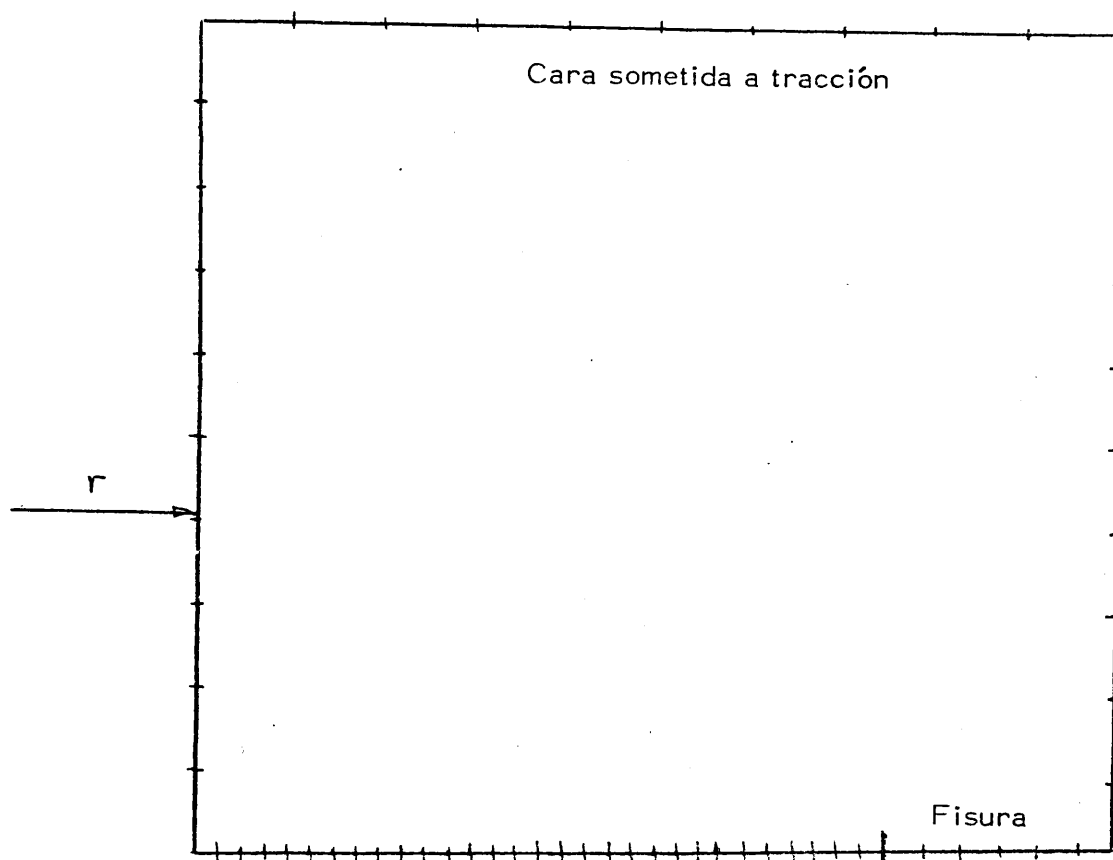


Fig.V.7.1

RESULTADOS

V.7



RESULTADOS

V.7

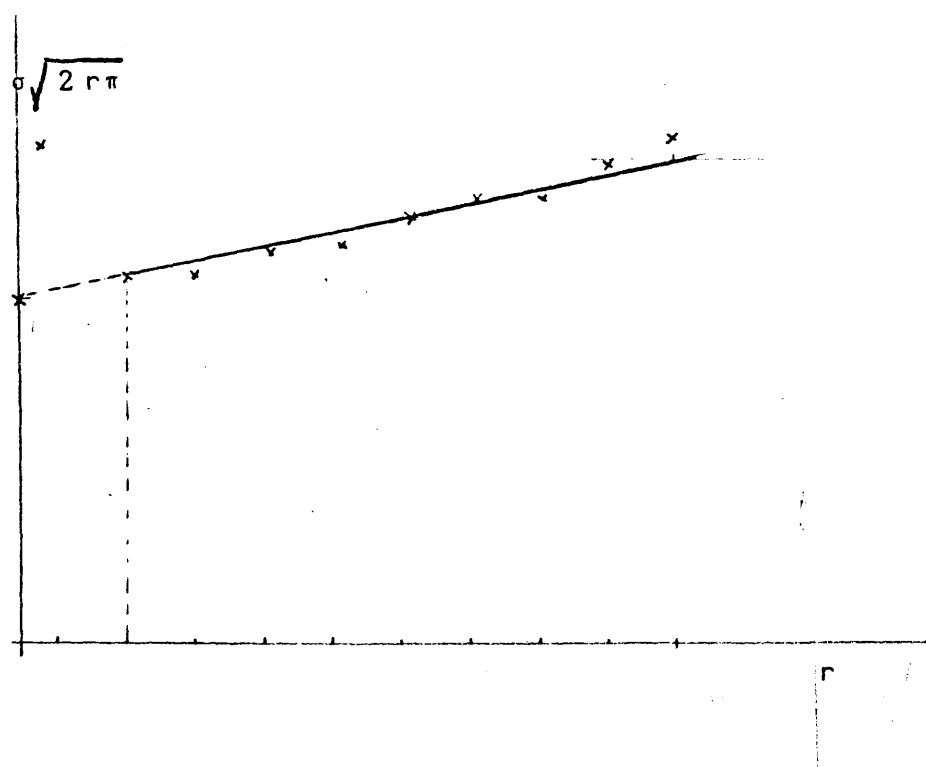
Las tensiones en los 10 primeros nodos más cercanos a la fisura son:

NODO	r	$\sigma_z$	$\sigma_z \sqrt{2 \pi r}$
1	1,5	6431,11	19743,38
2	4,5	2877,3	15299
3	7,5	2335,8	16171,82
4	10,5	2000,5	16248,87
5	13,5	1817,009	16734,46
6	10,5	1667,20	16973,35
7	13,5	1563,62	17307,66
8	22,5	1483,05	17633,44
9	25,5	1418,314	17948,83
10	28,5	1270,71	18332,97

RESULTADOS

V.7

Extrapolando los resultados anteriores y calculando el factor de concentración de tensiones se obtiene  $K_1 = 13886$ , observandose suficiente aproximación a pesar de la relativamente grosera discretización utilizada.



## VI.- CONCLUSIONES Y POSIBLES EXTENSIONES

### VI.1.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Se ha desarrollado la formulación de un método numérico de cálculo, desde el punto de vista de los métodos variacionales en espacios de Sobolev, que permite interpretar como un método híbrido entre los aproximados, así como establecer las afinidades y diferencias con otros métodos numéricos (Elementos Finitos).

Se ha presentado la formulación y análisis numérico completos del Método de los Elementos de Contorno en elasticidad axisimétrica, así como una extensión de este problema al caso plástico, que constituye el primer tratamiento consistente con el planteamiento inicial.

Se ha desarrollado también una nueva formulación de paso al contorno de la integral de fuerzas de volumen y pretensado en el caso tridimensional y axisimétrico.

Se ha planteado y resuelto un método efectivo de subregionalización y tratamiento de interfases, que permite la resolución de medios de contorno elásticos y heterogéneos a trozos.

Asimismo se han resuelto, con la máxima generalidad las diferentes condiciones de contorno que se pueden presentar en la resolución de un problema tridimensional, mediante el método que nos ocupa.

Se ha desarrollado también una modificación del método del gradiente conjugado, para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que permite la utiliza-

## CONCLUSIONES

### VI.1

---

ción óptima de éste en el caso del método de los elementos de contorno.

Por último se han implementado dos programas de ordenador, uno para el caso axisimétrico en elasticidad lineal, (Programa AXIE) que corresponde a un programa elemental y versátil ( ≈ 550 stencias FORTRAN), que permite la extensión simple en casos más complejos (caso plástico), y un programa tridimensional (FECET) ( ≈ 10000 sentencias FORTRAN), con las siguientes características:

- Realiza un tratamiento especializado de la estructura de datos, mediante un método de simulación de Memoria Virtual, al que se ha denominado Método de las Areas Buffer Múltiples, y que permite la resolución de cualquier problema sin limitaciones, haciendo uso de un tamaño de memoria variable y fijado por el usuario.

- Posee una organización de la matriz y del montaje de las constantes de integración en el sistema de ecuaciones, utilizando las distintas condiciones de contorno, que corresponde a la búsqueda del óptimo de esta organización tanto en lo que se refiere al montaje en sí, como a la posterior resolución del sistema.

- Utiliza el método del gradiente conjugado como una herramienta especialmente indicada para la resolución de sistemas de ecuaciones muy dispersas pero almacenadas en forma compacta.

Por último se han presentado una serie de resultados correspondientes a problemas tipo que avalan la potencia y exactitud tanto de la formulación y aproximación numérica presentadas, como de los programas desarrollados para su resolución.

Entre las conclusiones que se pueden destacar en este trabajo se encuentran:



## CONCLUSIONES

### VI.1

---

- El programa tridimensional presentado rebasa los límites establecidos usualmente para la definición de "programas académicos" permitiendo afirmar que sus aplicaciones industriales pueden ser amplias e importantes.

- El proceso de subregionalización seguido hace que el programa resulte particularmente apto para su aplicación a terrenos, ya sea para la resolución de estructuras, como para el estudio de la interacción terreno - estructura en cimentaciones superficiales. Adicionalmente, la conocida aptitud del método para el tratamiento de medios infinitos permiten también justificar lo anterior.

Finalmente, puede decirse, que con este programa se abre "ya definitivamente" el camino para que el método de los elementos de contorno deje de aplicarse exclusivamente a problemas simples, con una discretización limitada, para convertirse en un competidor, a la misma altura, de programas más generales de Elementos Finitos como SAP IV, ASKA ó STRUDL en su aplicación a problemas tridimensionales.

La elección de una u otra alternativa dependerá en cada caso de la naturaleza del problema a resolver (fundamentalmente de la relación contorno - dominio) y del tipo de información que se requiera (todo el dominio, sólo el contorno, una parte reducida del dominio, tec.).

En cuanto al programa axisimétrico, aún siendo un programa de tipo académico, ha permitido constatar el hecho de que en la mayoría de los casos el método vuelve a ser competitivo con Elementos Finitos tanto en cuanto a tiempo, como a memoria requerida.

### VI.2.- APLICACIONES Y DESARROLLO FUTURO

Ya se han apuntado en el epígrafe anterior algunas de las aplicaciones más características en las que puede aplicarse cada uno de los programas presentados, si bien, para resumir, podría decirse que el campo de aplicación responde a cualquier problema tridimensional heterógeno a trozos e isótopos que trabaje en el campo elástico, prácticamente sin restricciones de tamaño, condiciones de contorno o geometría.

En cuanto al programa axisimétrico tiene un campo de aplicación más reducido, no solo por la especialización propia que posee, sino por el programa en sí que presenta restricciones en cuanto a tamaño, y sobre todo homogeneidad del sólido.

El desarrollo futuro, por otra parte puede ser contemplado desde diferentes aspectos. Desde el punto de vista Matemático se hace necesario un análisis riguroso del error cometido en cada una de las fases del proceso, así como un estudio de las propiedades de la matriz del sistema y de la convergencia del método.

En cuanto a la aproximación numérica una extensión inmediata sería la utilización de elementos standard, con matrices ya definidas, que permitan la generalización de esta tipología elemental, al igual que ocurre en elementos finitos.

El proceso de integración adolece aún de un estudio de posibilidades que permitan llegar a una aproximación variable con la máxima eficiencia. Asimismo sería necesario un estudio de convergencia, y comparación para llegar al óptimo.

En cuanto el análisis de condiciones de contorno está aun abierto, para mejoras adicionales en cada uno de los distintos casos que pueden presentarse y que se

han resuelto.

Por último el método de resolución empleado necesitaría un análisis de error y mejora para una mejor adaptación al caso particular del método aquí propuesto.

Desde el punto de vista de campos de aplicación, cabe esperar la ampliación a leyes de comportamiento no lineales (plasticidad, viscoelasticidad, etc) siendo éste el campo actualmente en estudio y presumiblemente de pronta resolución, a pesar de los problemas numéricos y de programación que aún presenta (aumento de la dimensión del problema, discretización e integración en el dominio, etc). Asimismo la introducción de condiciones de anisotropía es también un campo en estudio, si bien se han conseguido ya algunos resultados en este cabe en este sentido decir que en el Departamento de Estructuras ya se está desarrollando la conjunción de ambos problemas con el objeto de un óptimo tratamiento del comportamiento en nudos, siguiendo los trabajos realizados en este campo por Prevost, Mroz y Desai utilizando el Método de Elementos Finitos.

Se hace necesaria también la ampliación al caso dinámico, campo en el cual es destacable la facilidad y aptitud del método para resolverlo, según han indicado los resultados

Asimismo, sería muy útil el conseguir el acoplamiento Elementos Finitos - Elementos de Contorno, con el objeto de aprovechar las ventajas de ambos en problemas particulares, como podrían ser las estructuras enterradas en las que el tratamiento del medio infinito mediante el M.E.C. permitiría obtener una solución de tensiones y movimientos en el contorno de la estructura, que podrían considerarse como condiciones de contorno para un estudio más detallado de ciertas partes de ésta, mediante elementos Finitos.

En cuanto al caso axisimétrico sería conveniente un desarrollo análogo al desarrollado en el capítulo II en elasticidad para el caso plástico, siguiendo la formulación esbozada en IV.4, así como la implementación de un programa que siguiendo dicha formulación permitiera la resolución de problemas en el dicho campo.

BIBLIOGRAFIA

VII

---

- 1.- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I (editions) "Handbook of Mathematical functions". Applied Mathematical Series NO55, National B. Of Standards (1965).
- 2.- AGMON. S "Lectures On Elliptic Boundary Value Problems". Van Nostrand, 1965.
- 3.- ALARCON. E "Notas Sobre el Método de los Elementos Finitos" - S.P.E.T.S.I.I.M., 1978.
- 4.- ALARCON. E "Elasticidad Racional" S.P.E.T.S.I.I.M. 1976.
- 5.- ALARCON. E, BREBBIA. C, DOMINGUEZ. J "The Boundary Element Method in Elasticity". Int. J. of Mech. Sciences. Ms 437 PP, 1 - 15, 1978.
- 6.- ALARCON. E, DOMINGUEZ. J, MARTIN. A y PARIS. F "Boundary Methods in Soil - Estructure Interaction". Second International Congress in Microzonation". San Francisco 1978.
- 7.- ALARCON. E, MARTIN. A y PARIS. F "Improve Boundary Elements in Torsion Problem". Congres Recent Advances in B.E.M. Southampton, 1978.

- 8.- ALARCON.E, MARTIN.A y PARIS.F "Boundary Elements in Porti-  
cal anda Elasticity Theory". Comunicati on Con-  
gress Prends in Computarize Estructural Anali-  
sis and Syntesis. Washington 1978.
- 9.- ALARCON.E, MARTIN.A y PARIS.F "El Método de las Ecuaciones  
Integrales Singulares en la Mecánica de los Me-  
dios Contínuos y la Teoría del Potencial". 75 -  
Aniversario R.S.E.F y Q. Madrid 1978.
- 10.- ALARCON.E, MARTIN.A y PARIS.F "Some Minor Problem vith -  
B.I.E.M.". Congress Applied Numerical Mode-  
lling Madrid 1978.
- 11.- AUBIN. J.P "Applied Abstract Analysis". John Willey 1977.
- 12.- AZIZ. A.K "The Mathematical Foundation of F.E.M." Academic -  
Press, 1972.
- 13.- BAKER. C "The Numerical Treatmente of Integral Equations". -  
Oxford University Press. 1977.

- 14.- BANERJEE.P.K. "Integral Equation Methods for Analysis of Piece-Wise Non-Homogeneous. Three-Dimensional Elastic Solids of Arbitrary Shape" Int. J. Mech. Science, 1976, Vol. 18 pp 293-303.
- 15.- BETTES,J.A "Adata structure for Finete Element Analysis". Int. J. Num. Methods en Engineering. Vol II - 1977.
- 16.- BOURBAKI "Integration Fascicule XIII, 2eme édition corrigée. Paris, HERMANN, 1965.
- 17.- BREBBIA,C.A "Boundary Elements Method for Engineers". Pen Tech Press. London. 1978.
- 18.- BREBBIA,C.A. -EDIT- "Recent Advances in Boundary Elements Method" Pentech Press, London. 1978.
- 19.- BREBBIA,C.A, y DOMINGUEZ.J "Boundary Elements Method for Potential Problems" Appl. Math. Modelling 1977 Vol I.
- 20.- BUI.H.D "Some Renarks About the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations". Int. J. Solids and Structures 14 (1978) pp 935-939.

- 21.- CALCOTE.L.R "Introduction to Continuum Mechanics". Van Nostrand 1967.
- 22.- CATHIE.D.N and BANERJEE.P.K "Numerical Solutions in Axisymmetric Elastoplasticity by Boundary Element - Method". Innovative Numerical Analysis in the - Applied Engineering Sciences. Ed. R.P. Shaw et al - 1980 pp 331-339.
- 23.- CIARLET.P.G "The Finite Element Method for Elliptic Problems" North Holland, 1978.
- 24.- COURANT - HILBERT "Method of Mathematical Physics" 2 volumes New York, Interscience Publishing 8th Edition 1970.
- 25.- CRUSE.T.A "The Direct Potential Method in Three-Dimensional Elastostatics". Dept. of Mech. Engineering - Carnegie Institute of Technology Pittsburgh - (1968).
- 26.- CRUSE.T.A " Numerical solutions in three dimensional elastostatics". Int. J. Sol. Struect. 5. 1258 74 (1969).



- 27.- CRUSE.T.A "Application of the Boundary Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics". Variational - Method in Engineering -dept. Civil Eng. Univ. Southampton Sept. 1972.
- 28.- CRUSE.T.A "Numerical Evaluation of Elastic Stress Intensity - Factors by the Boundary Integral Equation Method". The Winter Annual Meeting of the ASME, Nov. 1972.
- 29.- CRUSE.T.A "Application of the Boundary Integral Equation on - Method to Three-Dimensional Stress Analysis" Computers and Structures. Vol.3 pp. 509-527. 1973.
- 30.- CRUSE.T.A and BESUNER.P.N "Residual Life Prediction for - Surface Cracks in Complex Structural Details" AIAA Journal of Aircraft, August 1974.
- 31.- CRUSE.T.A. and RIZZO.F "A Direct Formulation and Numeri .- cal Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II, J. Math. Anal. Appl. 22, - May 1968.

- 32.- CRUSE.T.A. and RIZZO.F "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I, J. Math. Anal. Appl. 22, April 1968.
- 33.- CRUSE.T.A. SNOW.D.W, and WILSON.P.B "Numerical Solution in Asymmetric Elasticity". Computers and Structures 7 (1977) pp 445-451.
- 34.- CRUSE.T.A y VANBUREN.W "Three-Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge-Crack" Int. J. of Fract. Mechanic. Vol 7, nº 1, 1971.
- 35.- CHAUDONNERET.M "Sur la Resolution du Probleme de la Discontinuite du Vecteur Contrainte dans les Calculs de Structure par la Method des Equations Integrals". C.R. Acad. des Sc. Paris, t 284, serie A, (1977), pp. 463 a 466.
- 36.- CHAUDONNERET.M "Calcul des Concentrations de Contrainte en Elastoviscoplasticite". O.N.E.R.A. 1978-1.
- 37.- DATE.C.J "An Introduction to Database Systems, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1975).

- 38.- DAVIS.P.J. y RABINOWITZ.P"Methods of Numerical Integration". Academic Press 1975.
- 39.- DESAI.H.C "Volume and Strength of a Dolos". Journal of the waterways harbors and coastal engineering division". A.S.C.E. Vol. 102 Feb. 1976.
- 40.- DOMINGUEZ.J"Cálculo de Tensiones en las Inmediaciones de Anclajes. Aplicación del Método de los Elementos de Contorno". Tesis E.T.S.I.I. Sevilla 1977.
- 41.- DOMINGUEZ.J"Response of Embedded Foundations to Travelling Ways". Pub. nº R 78-24. M.I.T. 1978.
- 42.- DOMINGUEZ.J"Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations". M.I.T. Research Report. R 78-20 Civil Engineering. Dep. 1978.
- 43.- DOUGLAS.F.J. (Editor). "The NASTRAN Programmers Manual", Parts I and II. NASA SP -223 (1969).
- 44.- DVORNIK.J "Generalization of the C.G. method applied to linear and nonlinear problems" J. Comp. Str., 10, - 217-223. (1979).

- 45.- ENGELS.H "Numerical Quadrature and cubature". Academic Press. 1980. -
- 46.- ERDERLYI.A. et al "Higher Trascendental Functions" Vol. I Bateman Manuscript Proyect, Mc Graw Hill (1953).
- 47.- ERGATOUDIS.J.G "Isoparametric Finite Elements in two and Three Dimensional Stress Analysis". Phi. D Thesis University of Swansea 1968. -
- 48.- FELIPPA.C "Numerical Solutions of Field Problems in Continuum Physics". S.I.A.M.-A.M.S. 1970. -
- 49.- FELIPPA.C.A "Data base Management in scientific computing I. General description". Computers and Structures Vol. 10 pp 53-61 1979. -
- 50.- FELIPPA.C.A "Data base Management in scientific computing-II. Data Structures and Program archicteture". Computers and Structures Vol 12 pp 131-145 1980. -

- 51.- FENGELS.W y TROOST.A "An economical storage organization -  
for large and small Finite Element systems -  
with reference to the application of iterative -  
approximation methods to nonlinear material be-  
haviour". Int. J. Num. Methods in Engineering  
Vol. 15. (pp 701- 712) 1980.
- 52.- FEODOSIEV.V.I "Resistencia de Materiales". MIR 1972.
- 53.- FICHERA.G "Trends in applications of pure mathematics to me -  
chanics". Pitman Pub. 1976.
- 54.-FICHERA.G "Numerical and Quantitative Analysis" Pitman 1978.
- 55.- FRIEDRICHS.K "Ein Verfahren der Variationsrechnung das Mi -  
nimum eines Integrals als das Maximum anderen -  
Chisdruckes darzustellen". Nachrichten der -  
Akademie der Wissenschaft in Göttingen, 13-20 ,  
1929.
- 56.- FUNG.Y.C "Foundations of Solids Mechanics" Prentice Hall -  
1965.
- 57.- GAJOV.F.D "Problemas de Contorno". MIR 1980.

- 58.- GAMBOLATI.G "Fast solution to finite element flow equations by -  
Newton iteration and modified conjugate gra : -  
dient method". Inte. J, Num. Meth. Eng. 15, -  
661-675 (1980).
- 59.- GAVURIN.M.K. "Conferencias sobre los métodos de los Cálculos!"  
MIR (1973).
- 60.- GERMAN.- "Theorie des milieux continus. París . DUNOD.
- 61.- HARTMANN.F "Computing The C-Matrix in Non smooth Boundary=  
Points." Second Int. Seminar in Recent Advances in B.E.M. (229-246) Southampton March  
1980.
- 62.- HARTMANN,F "The Complementary Problem of Finite Elastic Bo-  
dies Second In. Seminar in Recent Advances in  
B.E.M. (367-379) Southampton March 1980.
- 63.- HELLINGER.E "Der allgemeine Ansatz der Mechanik der Kon -  
Enzyklopädie der Mathematischen Wi ssenschaf-  
ter Vol. 4, Part 4, 602-694.
- 64.- HOCHSTADT.H "Integral Equations" Wiley 1973.

BIBLIOGRAFIA

VII

---

- 65.- HORMANDER.L "On the Theory General Parti al Differential Operators". Acta. Mat. Vol. 94 - (1955).
- 66.- HORMANDER.L "Linear Partial Differential Operators" Springer-Verlag, 1964.
- 67.- HU.H.C "On some Variational Principles in the Theory of Elasticity and Platicity". Sci. Sinica 4, 33-54, 1955.
- 68.- IVANOV.V.V "The Theory of approximate methods and their applications to the numericka solution of singular integral equations" Noorchoff 1976.
- 69.- JANWON.M.A and PONTER.A.R (1963). Proc. Ray. Soc. London Series A. 273.
- 70.- JAWSON y SYMM "Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics". Academic Press, 1977.
- 71.- JENNINGS.A "Matrix Computation for Engineers and Scientiscs" Wiley (1977).
- 72.- JENNINGS.A MALIK.G.M "The solution of sparse linear equation by the conjugate gradient method". J. Num. Meth. Eng. 12, 141-158 (1978).

- 73.- JENSEN.P.S. "An Engenieering Analysis System of Utility - Programs". Lockaheed Missiles and Space Co. Internal. Rep. No. LMSC-D556249 Palo Alto California. (1976).
- 74.- KAMEL.M.D, Mc CABE.M.W. y DESHAZO P.G. "optimum design of Finite Element Softwave subject ro core res trictions". Computers and Structures Vol 10. pp 63-80, 1979.
- 75.- KAMEL.H.A. and Mc CABE M.W "System Manual" Departa. of - Aerospace and Mechanical Engineering. Univer. of Arizona. Tucton, Arizona (1978).
- 76.- KATZAN.H "Computer data Management and Data Base Technolo - gy". Van Nostrand Reinhold. New York (1975).
- 77.- KERMANIDIS.T "Numerical Solution for Axially Symetric Elasti - city problems of Elastoplasticity". Int. J. Sol. and Structures 11 (1975) pp 493-500.
- 78.- KNUTH.D.E "The Art of computer Programming " Vol I Funda - mental Algorichms. 2nd Edm. Addison-Wealey Reading Massachusetts (1973).
- 79.- KRASNOV.M.L, MAKARENKO.G.I, KISELIOV.A.I "Cálculo Va riacional". MIR (1976).



- 80.- KUPRADZE "Dynamical Problems in Elasticity, Progress en So -  
lids Mechanics, Vol III, edited by I.N Sneddon  
and R. Hill. Wiley (1963).
- 81.- LACHAT.J.C. "A futher Development of the boundary integral -  
Technique for elastostatic. Ph. D Thesis . -  
University of Southampton 1975.
- 82.- LACHAT.J.C and WATSON.J.O. "In: Boundary Integral Equa -  
tion method." Computational Applications in -  
applied mechanic. Ed. T.A. CRUSE and F.J. -  
RIZZO. AMD 11 ASME New York 1975.
- 83.- LACHAT.J.C. and WATSON.J.O "Effective Numerical Treament  
of Boundary Integral Equation: a Formulation -  
for Three - Dimensional Elastostatics" Int. J.  
for Numerical Methods in engineering 10 -  
(1976) pp 991 - 1005.
- 84.- LAX "On the Cauchy Problem for Hyperbolic Equations, and the -  
Differentiability of Solutions of Elliptic Equa -  
tions. Communkations of Pure and Applied Math  
(1955).

BIBLIOGRAFIA

VII

---

- 85.- LOVE "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity " -  
Dover (1944).
- 86.- LUSTERNIK.L.A y SOBOLEV.V.J "Element of Fundational Analysis" 2nd. ed. Wiley 1974.
- 87.- MARCHOUK.G "Methodes de Calcul Numerique". MIR (1977).
- 88.- MARINESCU "Sur les solutions des equations de l'elasticite asymetrique". Int. J. Eng. Sci. 1968.
- 89.- MASSONET.C.E "Numerical use of integral procedures . In -  
Stress analysis. Ed. O.C. Zienkiewicz. Wilwy  
(1965).
- 90.- Mc CORNICK.J.M. y WRIGHT.J. "Manoging Data in Fortran -  
Programs". ASCE 1979.
- 91.- MENDELSON.A "Platicity: Theory and Application". Mc Millan -  
London 1968.
- 92.- MIKHAILOV.L.G "A New class of singular integral equations" -  
Walters-Noord hoff 1970.
- 93.- MIJAILOV.V.P. "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales" MIR 1978.

- 94.- MIKHLIN "Integral Equations" Pergamon 1957.
- 95.- MIKHLIN "Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations" Pergamon Press (1965).
- 96.- MUSKHELISHVILI "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 4 th Ed. Noordhoff (1953)
- 97.- NEČAS, J. and HLAVÁČEK, I. "Mathematical Theory of elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction" - Elsevier 1981.
- 98.- NEDELCO, J.C. "Curved Finite Element Method for the solution of singular integral Equation on surfaces in  $R^3$ " - Comp. Met. in App. Mech. and Eng. (61-80) 1976.
- 99.- ODEN, J.T. "Applied Functional Analysis" Prentice Hall.
- 100.- PARIS, F. "El método de los elementos de contorno en la teoría del Potencial y la elasticidad" Tesis doctoral. E.T.S.I.I. de Madrid 1979.
- 101.- PARIS, F., DOMÍNGUEZ, J., MARTÍN, A., ALARCON, E. "Numerical Treatment of Thick Shells with holes" World Congress in Shell and Spatial structures Madrid 1979.

- 102.- POGORZELSKI.W "Integral Equations and their Applications" -  
Prentice Hall 1979.
- 103.- RALSTON.A "Introduccion al Analisis Numerico." Madrid 1970.
- 104.- REISSNER.E "On a Variational Theorem in Elasticity" J. -  
Mather Phys. 29, 90 - 95, 1950
- 105.- REKTORYS.K "Variational Methods in Mathematics, Science and  
engineering". Reidel Publishing Company. -  
1975.
- 106.- REY PASTOR.J "Los problemas Lineales de la Fisica" INTAET  
1955.
- 107.- RICCARDELLA. P.C. "An Improved implementation of the Boun-  
dary Integral Technique for Two Dimensional -  
Elasticity Problems". Varnegie Institute of -  
Technology - Pittsburgh Sept. 1972
- 108.- RIZZO "An integral Approach to Boundary Value Problems of -  
Classical Elastostatics. Q. Appl. Math. 25 -  
83-95 (1967).
- 109.- ROARK.R.J. y YOUNG.W.C "Formulas for Stress and Strain"  
Mc Graw-Hill 1975.

- 110.- ROSE.D.J, BUNCH.J.R "Sparse Matrix Computations" Ac. -  
Press (1976).
- 111.- SCHREM.E "Computer Implementation of the finite element pro-  
cedure. In numerical and Computer Methods -  
in Structural Mechanixs Ed. by S.J. Acade-  
mic Press , pp 97-122 , New York (1971).
- 112.- SCHWARTZ "Equations aux derives partielles" Seminaires, In.  
H. POINCARÉ, Paris 1955.
- 113.- SCHWARTZ "Theorie des dictributions" Paris Hermann 1966.
- 114.- SHWALTER.R.E "Hilbert Space Methods for partial differential  
Equations". Pitman 1977.
- 115.- SNEDDON.I.H. "The use of integral Transforms" Mc Graw -  
Hill 1972.
- 116.- STEIN.E.H. " Singular Integrales and Differentiability Pro -  
perties of functions". Princetor Uni. Press=  
1970.
- 117.- STROUD.A.H and SECREST.D "Gaussian Quadelature Formu  
laa", Prentice Hall 1966.

- 118.- SWEDOW.J.L and CRUSE.T.A "Formualtion of Boundary Integral Equations for Three-Dimensional Elasto - plastic Flow, Int. J. Solids Structures 7 - 1977 pp 1673-1683.
- 119.- SYMM.G.T"Integral Equation Methods in Potential Theory Proc. Roy. Soc. A. 275 - 1963.
- 120.- TEMAM.R"Numerical Analysis" Reidel 1973.
- 121.- TELLES.J.C.F and BREBBIA.C.A "On the Application of the Boundary Element Method to Platicity" Appl. - Math Modellig 3 (1979) pp 466 - 470.
- 122.- TELLES.J.C.F. and BREBBIA. C.A "The Boundary Element Method in Plasticity". Proc 2nd Int Seminer in Recent Advances in Boundary Element Methods (Edited by C.A. Brebbia)- Southampton (1980) pp 295 - 318.
- 123.- TIMOSHENKO.S y GOODIER.J.N "Teoría de la Elasticidad" Urmo 1972.
- 124.- TOTTENHAM.H and BREBBIA.C "Finete Element Techniques in Structural Mechanics". Porceedings of a seminar at the University os Southampton. - April 1970.

- 125.- VILLAGIO.P "Qualitative Methods in Elastitity" Noordhorff -  
1977.
- 126.- WASHIZU.K "On the Variational Principles of Elasticity and= Plasticity Aerolastic". Res. Lab. Mass. Inst Tech., TR 25-18 1055.
- 127.- WESTERGAARD .H.M "Theory of Elasticity and Plasticity" -  
Cambrige Mass. Harvard University Press -  
1952.
- 128.- WILSON.E.L. "Symbolic Matrix Interpretive System" Univer.  
of California, Berkeley, Depart. of Civil -  
Engineering, Resport UCSESM 73-3 (1963).
- 129.- WROBEL.L.C and BREBBIA. C.A "Axisymetric Potencial -  
Problems". Proc 2nd Int Seminar in Recent -  
Advances in Boundary Element Methods (ed.  
by C.A. Brebbia)- Southampton (1980) -  
pp 77-9.
- 130.- ZABREYKO.P.P et al "Integral Equation - A Reference Text".  
Noorhof the Netherlands. 1975.
- 131.- ZIENKIEWICZ.O.C. "The Finite Element Method in Engineering  
Science" Mc Graw-Hill- London 1971.

AI.- ECUACIONES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO ELASTICO

Son bien conocidas de todos, las ecuaciones fundamentales que definen el comportamiento elástico de un material. Por ello, este epígrafe se limitará a realizar una breve, pero necesaria, exposición de estas ecuaciones, así como a recordar los teoremas de Betti que como se indicó son la base del método propuesto.

- Ecuaciones de equilibrio en tensiones para el caso estático.

En el dominio en estudio  $\Omega$  :

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{AI.1}$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones,  $X_i$  son las fuerzas por unidad de volumen, y la ",," significa derivada.

En el contorno del dominio.

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad \text{en } \delta\Omega \quad \text{AI.2}$$

donde  $t_i$  son las componentes del vector tensión en un plano con normal de componentes  $n_j$ .

- Relaciones de compatibilidad.

Consideramos la teoría lineal de pequeñas deformaciones, por tanto la relación entre desplazamientos y deformaciones vendrá dada por el tensor de Cauchy.



$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{AI.3}$$

donde  $\epsilon_{ij}$  es el tensor deformación para pequeñas deformaciones y  $u_i$  es el vector de movimientos en el punto considerado.

En cuanto a la ecuación de compatibilidad en deformaciones puede plantearse como

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{AI.4}$$

- Ley de comportamiento.

Para el caso elástico, vamos a suponer que el material es homogéneo e isótropo por lo que la relación tensión - deformación puede plantearse a partir de la ecuación de Lamé, como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2 G \epsilon_{ij} \quad \text{en } \Omega \quad \text{AI.5}$$

donde  $\lambda$  y  $G$  son las constantes de Lamé.

Una forma más precisa de expresar esta relación es a partir del tensor de cuarto orden de Hooke, que relaciona las tensiones y deformaciones en la forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{en } \Omega$$

siendo

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \text{AI.6}$$

Por otro lado, la relación inversa de deformaciones en función de las tensiones se puede expresar como:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{en } \Omega \quad \text{AI.7}$$

- Condiciones de contorno.

En general todo medio continuo en elastoplasticidad, puede estar sometido a unas condiciones de contorno en movimientos  $u_i = \bar{u}_i$  en una cierta zona de contorno  $\delta\Omega_u$ , y a unas tensiones conocidas  $t_i = \bar{t}_i$  en otra zona  $\delta\Omega_t$ . Naturalmente, para que el problema esté bien definido,  $\delta\Omega_u \cup \delta\Omega_t = \delta\Omega$ , donde  $\delta\Omega$  es el contorno del dominio total.

- Ecuación de equilibrio en movimientos.

Muchas veces se prefiere plantear el problema elástico, en movimientos en vez de tensiones, para lo cual es necesario utilizar la ecuación de equilibrio en función de los movimientos, también denominada ecuación de Navier, y definida en la forma siguiente:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{G} X_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{AI.8}$$

ó en forma matricial

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + G \nabla^2 \underline{u} + \underline{X} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \text{AI.9}$$

donde  $\nabla$  es el operador y  $\nabla^2$  el operador laplaciano.

Esta expresión se suele poner también en función de un solo vector denominado vector de Galerkin del que derivan los movimientos en la forma siguiente:

$$u_i = x_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} x_{k,ik} \quad \text{AI.10}$$

Sustituyendo esta expresión en la expresión de Navier se puede obtener

$$x_{i,kkjj} = - \frac{X_i}{G} \quad \text{AI.11}$$

o en forma matricial

$$\nabla^4 \underline{x} = - \frac{\underline{X}}{G}$$

siendo  $\underline{x}$  el vector de Galerkin.

- Teorema de Betti.

Viene definido por la expresión

$$\int_{\Omega} \underline{X}^* \underline{u} \, d\Omega + \int_{\delta\Omega} \underline{u}^* \underline{t} \, ds = \int_{\Omega} \underline{X} \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\delta\Omega} \underline{t}^* \underline{u} \, ds \quad \text{AI.12}$$

donde  $(\underline{u}^*, \underline{t}^*, \underline{X}^*)$  es un sistema cualquiera que va a definir las características del método de solución utilizado, y que para el caso particular del método de los elementos de contorno toma la forma de la solución de movimientos y tensiones correspondientes a la solución de Kelvin en un punto del sólido infinito.

### AII.1.- ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE LEGENDRE

Las funciones de Legendre son las soluciones de la ecuación de Legendre

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right] w = 0 \quad \text{AII.1.1}$$

Existen dos soluciones linealmente independientes para esta ecuación, que normalmente se denominan funciones de primera especie  $P_\nu^\mu(z)$  y de segunda especie  $Q_\nu^\mu(z)$ , respectivamente.

Como en el caso axisimétrico únicamente se utiliza esta última, como se dedujo en I.7 está será la que se estudiará, y particularmente para los casos de  $\nu = \frac{1}{2}$  y  $\nu = -\frac{1}{2}$  que son los utilizados.

- Algunas relaciones importantes para las relaciones de Legendre.

$$Q_{\frac{1}{2}}^1(\gamma) = \frac{dQ_{\frac{1}{2}}^0(\gamma)}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

$$Q_{-\frac{1}{2}}^1(\gamma) = \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}^0(\gamma)}{d\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

AII.1.2

$$Q_{-\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma) = -4 \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}^0(\gamma)}{d\gamma}$$

$$Q_{\frac{1}{2}}^{-1}(\gamma) = 4/3 \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}^0(\gamma)}{d\gamma}$$

- Derivadas de las funciones de Legendre de orden cero.

$$\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) - Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)\gamma)$$

$$\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (\gamma Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) - Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma))$$

AII.1.3

$$\frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} = \frac{1}{4(\gamma^2 - 1)} (3Q_{\frac{1}{2}} - 8 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma})$$

$$\frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} = \frac{-1}{4(\gamma^2 - 1)} (Q_{-\frac{1}{2}} + 8 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma})$$

- Expresión de las funciones de Legendre en función de las funciones elípticas.

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \bar{K} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right)$$

$$Q_{\frac{1}{2}}(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \bar{K} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right) - \sqrt{2(\gamma+1)} E \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right)$$

AII.1.4

$$\frac{dQ_{\frac{1}{2}}(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+1)}} \bar{K} \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} E \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right)$$

$$\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{d\gamma} = - \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \frac{1}{\sqrt{2(\gamma-1)}} E \left( \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \right)$$

Por último y para motivos computacionales las funciones elípticas suelen -  
aproximarse en la forma

$$K(m) = [a_0 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4] + [b_0 + b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4] \cdot \ln\left(\frac{1}{m_1}\right) + \epsilon(m)$$

$$a_0 = 1,38629436112$$

$$b_0 = 0,5$$

$$a_1 = 0,09666344259$$

$$b_1 = 0,12498593597$$

$$a_2 = 0,03590092383$$

$$b_2 = 0,06880248576$$

AII.1.5

$$a_3 = 0,03742563713$$

$$b_3 = 0,03328355346$$

$$a_4 = 0,01451196212$$

$$b_4 = 0,00441787012$$

$$\epsilon(m) \leq 2 \times 10^{-8}$$

$$E(m) = [1 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4] + [b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4] \ln\left(\frac{1}{m_1}\right) + \epsilon(m)$$

$$a_1 = 0,44325141463$$

$$b_1 = 0,24998368310$$

$$a_2 = 0,06260601220$$

$$b_2 = 0,09200180037$$

$$a_3 = 0,04757383546$$

$$b_3 = 0,04069697526$$

AII.1.6

$$a_4 = 0,01736506451$$

$$b_4 = 0,00526449639$$

$$\epsilon(m) \leq 2 \times 10^{-8}$$

$$m_1 = 1 - m$$

AII.2.- DERIVADAS DEL TENSOR DE GALERKIN

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_r}{\partial r} &= \frac{1}{12 \pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{Rr} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{12 \pi^2 G} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{R/r} \cdot \right. \\
 &\quad \cdot (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) + \sqrt{Rr} \left( \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial r} Q_{\frac{1}{2}} - \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \Big] = \\
 &= \frac{\sqrt{Rr}}{12 \pi^2 G} \left\{ \frac{1}{2r} \gamma Q_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2r} Q_{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial \gamma}{\partial r} \left[ \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Q_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \right] \right\} = \frac{\sqrt{Rr}}{12 \pi^2 G} \left( \frac{1}{2r} \gamma Q_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2r} Q_{-\frac{1}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} Q_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{Rr}}{24 \pi^2 G} \left[ (3/R - 2/r) Q_{\frac{1}{2}} - 1/r Q_{-\frac{1}{2}} \right] \\
 \frac{\partial x_r}{\partial r} &= \frac{1}{24 \pi^2 G \sqrt{Rr}} \left[ (3r - 2 \gamma R) Q_{\frac{1}{2}} - R Q_{-\frac{1}{2}} \right] \tag{A II.2.1}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del valor de las derivadas de las funciones de Legendre en función de esas mismas funciones, expresiones

Asi mismo, operando análogamente



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_r}{\partial z} &= \frac{1}{12 \pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial}{\partial z} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{12 \pi^2 G} \sqrt{Rr} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial z} Q_{\frac{1}{2}} + \right. \\
 &+ \gamma \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left. \right) = \frac{1}{12 \pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left( Q_{\frac{1}{2}} + \gamma \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right) = \\
 &= \frac{1}{12 \pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left[ Q_{\frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{2(\gamma^2 - 1)} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{12 \pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{3}{2} Q_{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial z} = \frac{-(Z-z)}{8 \pi^2 G \sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}}$$

AII.2.2

También

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_z}{\partial r} &= \frac{-1}{4 \pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{Rr} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{-1}{4 \pi^2 G} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{R/r} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) + \right. \\
 &+ \sqrt{Rr} \left( \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} Q_{-\frac{1}{2}} - \gamma \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \left. \right] = \frac{-\sqrt{Rr}}{4 \pi^2 G} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{1}{2r} Q_{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2r} Q_{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial \gamma}{\partial r} \left[ \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (\gamma Q_{\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}}) - Q_{-\frac{1}{2}} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \gamma \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) \right\} = \frac{-\sqrt{Rr}}{4\pi^2 G} \left[ \frac{1}{2r} Q_{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{2r} Q_{-\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1/R - \gamma/r) Q_{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\frac{\partial x_z}{\partial r} = \frac{-1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} (R Q_{\frac{1}{2}} - r Q_{-\frac{1}{2}})$$

Aii.2.3

Del mismo modo

$$\frac{\partial x_z}{\partial z} = \frac{-1}{4\pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial}{\partial z} (Q_{\frac{1}{2}} - \gamma Q_{-\frac{1}{2}}) = \frac{-1}{4\pi^2 G} \sqrt{Rr} \left( \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \right. \\ \left. - \gamma \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} Q_{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{-1}{4\pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left( \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \gamma \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - Q_{-\frac{1}{2}} \right) = \\ = \frac{-1}{4\pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left( -\frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} \gamma Q_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} Q_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} \gamma Q_{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)} \gamma^2 Q_{-\frac{1}{2}} - Q_{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{8\pi^2 G} \sqrt{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} Q_{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \frac{-(Z - z)}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}}$$

AII.2.4

Asimismo y según AII.10 es necesario el cálculo de las derivadas segundas del tensor de Galerkin.

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial r^2} = \frac{1}{24\pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Rr}} \left[ (3r - 2\gamma R) Q_{\frac{1}{2}} - R Q_{-\frac{1}{2}} \right] \right\} = \frac{1}{24\pi^2 G} \cdot$$

$$\left\{ \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} \left[ (3r - 2\gamma R) Q_{\frac{1}{2}} - R Q_{-\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{Rr}} \left[ \left[ 3 - 2R(1/R - \gamma/r) \right] Q_{\frac{1}{2}} + (3r - 2\gamma R)(1/R - \gamma/r) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - R(1/R - \gamma/r) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right\} = \frac{1}{24\pi^2 G \sqrt{Rr}} \cdot$$

$$\left\{ \left[ -3/2 Q_{\frac{1}{2}} + \gamma R/r Q_{\frac{1}{2}} + \gamma \frac{R}{2r} Q_{\frac{1}{2}} - (\gamma^2 - 1) R/r \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + Q_{\frac{1}{2}} + 2\gamma R/r Q_{\frac{1}{2}} + 3r/R \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - 5\gamma \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + 2\gamma^2 R/r \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \gamma \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \gamma^2/r \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} - \gamma R/2r Q_{\frac{1}{2}} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial r^2} = \frac{1}{24\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left\{ 3\gamma R/r Q_{\frac{1}{2}} + \left[ 3 \frac{(\gamma R - r)^2}{Rr} - (\gamma^2 - 1) \right] \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\}$$

APENDICE II

AII.2

donde se ha utilizado AII.1 para la sustitución de  $\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma}$  en función de  $Q_{\frac{1}{2}}$  y

$$\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma}.$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_r}{\partial r \partial z} &= \frac{\partial^2 x_r}{\partial z \partial r} = \frac{-(Z-z)}{8\pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{-(Z-z)}{8\pi^2 G} \left[ \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{Rr}} (1/R - \gamma/r) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \\ \frac{\partial^2 x_r}{\partial r \partial z} &= \frac{Z-z}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \end{aligned} \quad \text{AII.2.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_r}{\partial z^2} &= \frac{-1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (Z-z) Q_{\frac{1}{2}} \right] = \frac{-1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left[ -Q_{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + (Z-z) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \cdot \left( \frac{-(Z-z)}{Rr} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial z^2} = \frac{1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left[ Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \quad \text{AII.2.7}$$

Operando de idéntica forma para el caso de  $\psi_z$  se tiene.

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial r^2} = \frac{-1}{8\pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sqrt{Rr}} (R Q_{\frac{1}{2}} - r Q_{-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{-1}{8\pi^2 G} \left\{ \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} \right.$$

$$\left. + (R Q_{\frac{1}{2}} - r Q_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{\sqrt{Rr}} \left[ R (1/R - \gamma/r) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - Q_{-\frac{1}{2}} - r (1/R - \gamma/r) \right. \right.$$

$$\left. \cdot \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\} = \frac{-1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left\{ \frac{-R}{2r} \left[ 2(\gamma^2 - 1) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + Q_{-\frac{1}{2}} \right] + \left( 1 - \frac{\gamma R}{r} \right) \right.$$

$$\left. \cdot \left( \gamma \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} - (r/R - \gamma) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial r^2} = \frac{1}{8\pi^2 G \sqrt{Rr}} \left\{ \gamma R/r Q_{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{(\gamma R - r)^2}{Rr} + (\gamma^2 - 1) R/r \right] \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\}$$

AII.2.8

donde ahora se ha hecho uso de las expresiones AII.1 y AII.2 que me permiten obtener los valores de  $Q_{\frac{1}{2}}$  y  $\frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma}$  en función de  $Q_{-\frac{1}{2}}$  y  $\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma}$ .

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z \partial r} = \frac{-(Z-z)}{8\pi^2 G} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{-(Z-z)}{8\pi^2 G} \left[ \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{Rr}} (1/R - \gamma/r) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial r \partial z} = \frac{Z-z}{8\pi^2 G r \sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

AII.2.9

Por último se tiene

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial z^2} = \frac{-1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} \frac{\partial}{\partial z} [(Z-z) Q_{\frac{1}{2}}] = \frac{-1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} [-Q_{-\frac{1}{2}} + (Z-z) \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{-(Z-z)}{Rr} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma}]$$

$$\frac{\partial^2 x_z}{\partial z^2} = \frac{1}{8\pi^2 G Rr} \left[ Q_{-\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{\sqrt{Rr}} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \quad \text{AII.2.10}$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial R} = \frac{1}{24\pi^2 G\sqrt{Rr}} \left[ (3R - 2\gamma r) Q_{\frac{1}{2}} - r Q_{-\frac{1}{2}} \right] \quad \text{AII.2.11}$$

$$\frac{\partial x_r}{\partial Z} = - \frac{\partial \psi_r}{\partial \bar{z}} = \frac{Z-z}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} Q_{\frac{1}{2}} \quad \text{AII.2.12}$$

$$\frac{\partial x_z}{\partial R} = \frac{-1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} \left[ r Q_{\frac{1}{2}} - R Q_{-\frac{1}{2}} \right] \quad \text{AII.2.13}$$

$$\frac{\partial x_z}{\partial Z} = - \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \frac{Z-z}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} Q_{-\frac{1}{2}} \quad \text{AII.2.14}$$

AII.3.- CALCULO DEL TENSOR  $U_{ik}$

Con todas las expresiones anteriormente obtenidas es posible el cálculo del tensor  $U_{ik}$  según las ecuaciones IV.2.1.8, en la forma siguiente.

$$\begin{aligned}
 U_{rr} &= \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} (\nabla^2 - 1/r^2) x_r + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 x_r}{\partial r^2} = \frac{1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[ \gamma R/r Q_{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{(\gamma R-r)^2}{Rr} - 1/3 (\gamma^2 - 1) \right] \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \right. \right. \\
 &+ Q_{\frac{1}{2}} - 2/3 \gamma R/r Q_{\frac{1}{2}} + 1/3 R/r \left[ 2(\gamma^2 - 1) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \gamma Q_{\frac{1}{2}} \right] - \\
 &- 1/r^2 \left[ Rr (\gamma^2 - 1) \cdot 4/3 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \left. \right] + Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \\
 &= \frac{1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[ Q_{\frac{1}{2}} - (\gamma^2 - 1) R/r \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{(\gamma R-r)}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \right. \\
 &+ Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \left. \right\} = \frac{1}{8\pi^2 G\sqrt{Rr}} \left[ \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} Q_{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{-(Z-z)^2}{Rr} + \right. \right. \\
 &+ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left( \frac{-(Z-z)^2}{Rr} \right) \left. \right] \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma}
 \end{aligned}$$

$$U_{rr} = \frac{1}{8 \pi^2 G R r} \left[ \frac{3-4 \nu}{2(1-\nu)} Q_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{(Z-z)^2}{R r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

$$U_{rr} = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) R r} \left[ (3-4 \nu) Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{R r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \quad \text{AII.3.1}$$

Asímismo

$$U_{zr} = \frac{-1}{2(1-\nu)} \left( \frac{\partial^2 x_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial x_r}{\partial z} \right) = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{R r}} \left\{ (Z-z) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - Q_{\frac{1}{2}} \right] \right.$$

$$U_{zr} = \frac{Z-z}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{R r}} \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} - (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \quad \text{AII.3.2}$$

Por otro lado

$$U_{rz} = \frac{-1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 x_z}{\partial r \partial z} = - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{Z-z}{8 \pi^2 G r \sqrt{R r}} \left[ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$



$$U_{rz} = \frac{-(Z-z)}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \quad \text{AII.3.3}$$

Por último se tiene

$$\begin{aligned} U_{zz} &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \nabla^2 \chi_z + \frac{\partial^2 \chi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_z}{\partial r} \right] = \frac{1}{8 \pi^2 G \sqrt{Rr}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left[ Q_{-\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \frac{\gamma R}{r} Q_{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{(\gamma R-r)^2}{Rr} + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\gamma^2 - 1) R/r \right] \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - R/r \left[ 2(\gamma^2 - 1) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \gamma Q_{-\frac{1}{2}} \right] + Q_{-\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \frac{1}{8 \pi^2 G \sqrt{Rr}} \left\{ \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} Q_{-\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{(Z-z)^2}{Rr} + \frac{(\gamma R-r)^2}{Rr} - \right. \right. \\ &\left. \left. - R/r (\gamma^2 - 1) \right] \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} = \frac{1}{8 \pi^2 G \sqrt{Rr}} \left\{ \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} Q_{-\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left[ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{(Z-z)^2}{Rr} - \frac{(Z-z)^2}{Rr} \right] \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right\} \right. \end{aligned}$$

$$U_{zz} = \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu)\sqrt{Rr}} \left[ (3 - 4\nu) Q_{-\frac{1}{2}} - \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right]$$

AII.3.4

AII.4.- DERIVADAS DEL TENSOR  $U_{ik}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)} - \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) Q_{\frac{1}{2}} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \\ &+ \frac{1}{Rr} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{(Z-z)^2}{Rr^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} (3-4\nu) \left[ \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{2r} \right] + \\ &+ \frac{(Z-z)^2}{Rr} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{3}{2r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right) \end{aligned} \quad \text{AII.4.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{2(Z-z)}{Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \right. \\ &+ \left. \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{Rr} \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - 2 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{Z-z}{16\pi^2 G(1-\nu)} \left[ \frac{-3}{2r^2\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} - (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \right. \\
 &+ \frac{1}{r\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \gamma/r \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (\gamma - r/R) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\
 &= \frac{Z-z}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} (3\gamma/r - \frac{\partial \gamma}{\partial r} - 1/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{3Q_{\frac{1}{2}}}{4r} - \right. \\
 &\left. - (\gamma - r/R) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \quad \text{AII.4.3}
 \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{1}{2} Q_{\frac{1}{2}} - (Z-z) \cdot \right. \\
 &\cdot \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + (\gamma - r/R) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left[ (r/R - \gamma) \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{1}{2} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \right. \\
 &\left. + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{2} \right] \quad \text{AII.4.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{rz}}{\partial r} &= \frac{-(Z-z)}{16\pi^2 G(1-\nu)} \left[ \frac{-3}{2r^2\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \right. \\
 &+ \frac{1}{r\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \left( \frac{\partial \gamma}{\partial r} - 1/R \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + (\gamma - r/R) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\
 &= \frac{Z-z}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} (3\gamma/r - 3 \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \right. \\
 &\left. - 1/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{3Q_{-\frac{1}{2}}}{4r} \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.5

donde en este caso se ha hecho uso de la expresión que relaciona  $\frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma}$  con la misma función  $Q_{-\frac{1}{2}}$  y su derivada primera.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}} + (\gamma - r/R) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (Z-z) \cdot \right. \\
 &\cdot \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + (\gamma - r/R) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\
 &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu) r\sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \left[ (r/R - \gamma) \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - 3/2 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] - \right. \\
 &\left. - (r/R - \gamma) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2} \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.6

Por último las derivadas de  $U_{zz}$  serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} &= \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu)} \left[ \frac{-1}{2r\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) Q_{-\frac{1}{2}} - \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{(Z-z)^2}{Rr^2} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\ &= \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{(Z-z)^2}{Rr} \left( \frac{3}{2r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.7}$$

y también

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} &= \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{2(Z-z)}{Rr} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \right. \\ &- \left. \frac{(Z-z)^2}{Rr} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] = \\ &= \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{Rr} \left[ 2 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] \right] \end{aligned}$$

AII.4.8

APENDICE II

AII.4

Si ahora derivamos respecto a las variables R, Z del punto donde se centra la singularidad, se obtiene en la misma forma que anteriormente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{rr}}{\partial R} &= \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{2R} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{(Z-z)^2}{Rr} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{3}{2R} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{rr}}{\partial Z} &= \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} = \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{Rr} \right. \\ &\cdot \left. \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + 2 \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{zr}}{\partial R} &= \frac{Z-z}{16\pi^2 G(1-\nu)r\sqrt{Rr}} \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} (r/R - \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \frac{3r}{R^2}) \right. \\ &\cdot \left. \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{4R} \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{zr}}{\partial Z} &= \frac{\partial U_{zr}}{\partial z} = \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)r\sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \left[ (r/R - \nu) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \right. \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{2} + (r/R - \nu) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.12}$$

$$\frac{\partial U_{rz}}{\partial R} = \frac{Z-z}{16\pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} (\gamma/R - 3 \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \right. \\ \left. - \frac{3r}{R^2}) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{4R} \right] \quad \text{AII.4.13}$$

$$\frac{\partial U_{rz}}{\partial Z} = \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} = \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \left[ (r/R - \nu) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 3/2 \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + (r/R - \gamma) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2} \right] \quad \text{AII.4.14}$$

$$\frac{\partial U_{zz}}{\partial R} = \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3 - 4\nu) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2R} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \left( 3/2r \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right) \right] \quad \text{AII.4.15}$$

$$\frac{\partial U_{zz}}{\partial Z} = \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} = \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3 - 4\nu) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{(Z-z)}{Rr} \right. \\ \left. \cdot \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + 2 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right] \quad \text{AII.4.16}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial r \partial R} = & \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \right. \right. \\ & + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{4Rr} + \frac{(Z-z)^2}{Rr} \\ & + \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \frac{\partial \gamma}{\partial r \partial R} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \\ & \left. \left. + \frac{9}{4Rr} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{rr}}{\partial z \partial Z} = & \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} - \right. \right. \right. \\ & - \frac{1}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \left. \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{(Z-z)}{Rr} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} - \right. \right. \\ & - \frac{3}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \left. \right) \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{3}{5} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \left. \right] \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.18}$$

$$\frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial R} = \frac{1}{16\pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \left( \frac{r}{R} - \gamma \right) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{1}{2} \left( \gamma/R - 3 \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \frac{3r}{R^2} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + (r(R-\gamma)) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} + \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \gamma}{\partial z \partial R} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \left. \right] - (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \frac{\gamma}{R} + \frac{3r}{R^2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left[ \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Q_{\frac{1}{2}}}{4R} \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.19

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{zr}}{\partial z \partial Z} &= \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \left[ (r/R - \nu) \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 3/2 \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] + \left[ (Z-z) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \right] \left[ (r/R - \gamma) \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.20

Observando detenidamente las expresiones de  $\Sigma_{ijk r}$  se observa que con las cuatro derivadas anteriores y los valores de

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) \text{ y de } \frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right)$$

quedan totalmente definidos to-

dos los términos de  $\Sigma_{ijk r}$  por lo que a continuación se darán las expresiones de estas dos derivadas.

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} - \frac{1}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \frac{Z-z}{r} \left[ \frac{Z-z}{Rr} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} - \frac{3}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] + (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} +$$

$$+ [(r/R - \gamma) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} + \gamma/2 (3/r \frac{\partial \gamma}{\partial R} + 1/R \frac{\partial \gamma}{\partial r}) - 3/2 \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} -$$

$$- \frac{3r}{2R^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{5}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial R}] \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \left[ \frac{3}{4r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{1}{4R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{4R^2} - \frac{3}{4Rr} \right] \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{3Q_{\frac{1}{2}}}{8R^2} ]$$

AII.4.21

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \frac{Z-z}{r} \left[ \frac{Z-z}{R} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} - 3/2 \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{3\gamma}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} + 2/R \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{5}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \right] . \\
 & \cdot \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^3 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} \Big] + \\
 & + 1/r \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3\gamma}{r} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} - 5/R \right) \frac{dQ_{\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{3Q_{\frac{1}{2}}}{4r} \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.22

Asimismo para el caso correspondiente a  $\Sigma_{ijk}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_{rz}}{\partial z \partial R} &= \frac{Z-z}{16\pi^2 G(1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \left[ (r/R - \gamma) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} - 5/2 \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \gamma/2 \left( \frac{3}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) - \frac{3}{2R^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right] \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \left[ 9/4r \frac{\partial \gamma}{\partial R} - 3/2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} + 3/4r \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3\gamma}{4Rr} + \frac{3}{4R^2} \right] \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - \frac{3Q_{-\frac{1}{2}}}{8Rr} \right]
 \end{aligned}$$

AII.4.23

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{rz}}{\partial r \partial Z} = & \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) r \sqrt{Rr}} \left[ (Z-z) \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \right. \right. \\ & + \left[ (r/R - \gamma) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} + \frac{1}{2} \left( -\frac{3\gamma}{r} - 5 \frac{\partial \gamma}{\partial r} - 1/R \right) \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \right] \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \\ & + 3/2 \left( 3/2r \frac{\partial \gamma}{\partial Z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \left. + (r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{1}{2} \left( -\frac{3\gamma}{r} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 \frac{\partial \gamma}{\partial r} - 1/R \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{3Q_{-\frac{1}{2}}}{4r} \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial R} = & \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3 - 4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \left( -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 1/2R \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] + \frac{Z-z}{r} \left[ -\frac{Z-z}{R} \left[ \frac{3}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} \right) \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} \right] + 1/R \left( 2 \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - 3/R \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{AII.4.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{zz}}{\partial z \partial Z} = & \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \right. \right. \\ & + \frac{Z-z}{r} \left[ \frac{-Z-z}{R} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] + \right. \\ & \left. \left. + 2/R \left( \frac{\partial \gamma}{\partial Z} - \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \right] + 2/Rr \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] \end{aligned} \quad \text{AIII.4.26}$$

Las derivadas compuestas quedarán de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) = & \frac{1}{16 \pi^2 G (1-\nu) \sqrt{Rr}} \left[ (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \right. \right. \\ & + \left( \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial R} - \frac{1}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \left. \right] + \frac{1-2\nu}{r} \left( \frac{Q_{-\frac{1}{2}}}{2R} - \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right) + (\gamma/r - 1/R) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + (1/R \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \frac{\gamma}{2Rr} + \frac{3}{2R^2}) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{r} \cdot \\ & \cdot [(r/R - \gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} + [(r/R - \gamma) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} + \frac{1}{2} (\gamma/R - 5 \frac{\partial \gamma}{\partial R} - \end{aligned}$$

$$\frac{3r}{R^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + 3/2 \left( \frac{1}{2R} \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial R} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{R} \cdot$$

$$\cdot \left[ \left( 3/2 \left( 1/r \frac{\partial \gamma}{\partial R} + 1/R \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} \right) \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} - \frac{9}{4 R r} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] ]$$

AII.4.27

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left( \frac{\partial U_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial U_{zz}}{\partial r} \right) = \frac{1}{16\pi^2 G(1-\nu)\sqrt{Rr}} (3-4\nu) \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} \right] - \frac{1-2\nu}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + (1/R - \gamma/r) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} + 1/r \left( \frac{\partial \gamma}{\partial Z} - 3/2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} + \frac{Z-z}{r} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[ \left( r/R - \nu \right) \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} - 5/2 \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} \right] + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z \partial Z} \left[ \left( r/R - \nu \right) \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} - \right.$$

$$- 3/2 \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} ] + 1/r (3/r \frac{dQ_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2}) + \frac{Z-z}{R} [ (3/2r$$

$$. \frac{\partial \gamma}{\partial Z} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial Z} ) \frac{d^2 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^2} - \frac{\partial \gamma}{\partial Z} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{d^3 Q_{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^3} ] ]$$

AII.4.28



AII.5.- INTEGRALES ANALITICAS EN EL CONTORNO

AII.5.1.- INTEGRALES CORRESPONDIENTES AL CALCULO DE A

$$I_1 = \int_{-S/2}^{S/2} \sqrt{r} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{3 t_r} \left\{ \left( \ln \frac{S^2}{256 R} - 2/3 \right) \left[ (R+b)^{3/2} - (R-b)^{3/2} \right] - \left[ (R+b)^{3/2} \ln(R+b) - (R-b)^{3/2} \ln(R-b) \right] - 4R (\sqrt{R+b} - \sqrt{R-b}) + 2R^{3/2} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right] \right\}; \quad b = \frac{t_r S}{2}$$

AII.5.1.1

$$I_2 = \int_{-S/2}^{S/2} \sqrt{r} ds = \frac{S}{3b} \left[ (R+b)^{3/2} - (R-b)^{3/2} \right]$$

AII.5.1.2

$$I_3 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{3 t_r^2} \left\{ \left[ (b-2R)\sqrt{R+b} + (b+2R)\sqrt{R-b} \right] \cdot \left[ \ln \frac{S^2}{256 R} + 2/3 \right] - \left[ (b-2R)\sqrt{R+b} \ln(R+b) - (b+2R)\sqrt{R-b} \ln(R-b) \right] - 4/3 \left[ (R+b)^{3/2} - (R-b)^{3/2} \right] + 4R (\sqrt{R+b} - \sqrt{R-b}) \right\}$$

$$- 4R^{3/2} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right) \quad \text{AII.5.1.3}$$

$$I_4 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{\sqrt{r}} ds = \frac{2}{3 t_r^2} \left\{ (b-2R) \sqrt{R+b} + (b+2R) \sqrt{R-b} \right\} \quad \text{AII.5.1.4}$$

$$I_5 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 2 (R+b - R-b) - R \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right) \quad \text{AII.5.1.5}$$

$$I_6 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{r^{3/2}}{s} ds = \frac{2}{3} \left[ (R+b)^{3/2} - (R-b)^{3/2} \right] + 2R (\sqrt{R+b} - \sqrt{R-b}) - R^{3/2} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right) \quad \text{AII.5.1.6}$$

Cuando el elemento es paralelo al eje de simetría,  $t_r = 0$  y también  $b = 0$  y  $r = R$  con lo cual las integrales anteriores cambian de valor en la forma siguiente:

$$I_1 = \int_{-S/2}^{S/2} \sqrt{r} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \sqrt{R} S \left( \ln \frac{S^2}{256 R^2} - 2 \right) \quad \text{AII.5.1.7}$$

$$I_2 = \int_{-S/2}^{S/2} \sqrt{r} ds = S \sqrt{R} \quad \text{AII.5.1.8}$$

$$I_3 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 Rr} ds = 0 \quad \text{AII.5.1.9}$$

$$I_4 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{\sqrt{r}} ds = 0 \quad \text{AII.5.1.10}$$

$$I_5 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 0 \quad \text{AII.5.1.11}$$

$$I_6 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{r^{3/2}}{s} ds = 0 \quad \text{AII.5.1.12}$$

AII.5.2.- INTEGRALES CORRESPONDIENTES AL CALCULO DE B

$$I_1 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{t_r} \left[ \left( \ln \frac{s^2}{256 R^2} - 2 \right) \right.$$

$$\cdot \left[ \sqrt{R+b} - \sqrt{R-b} \right] - \left[ \sqrt{R+b} \ln \sqrt{R+b} - \sqrt{R-b} \ln \sqrt{R-b} \right] + 2R .$$

$$\cdot \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right) \quad \text{AII.5.2.1}$$

$$I_2 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{2}{t_r} \left( \sqrt{R+b} - \sqrt{R-b} \right) \quad \text{AII.5.2.2}$$

$$I_3 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{t_r^2} \left[ \left( \ln \frac{s^2}{256 R^2} - 2 \right) \right.$$

$$\cdot \left( \sqrt{R+b} - \sqrt{R-b} + \frac{R}{\sqrt{R+b}} - \frac{R}{\sqrt{R-b}} \right) - \left[ \frac{2R+b}{\sqrt{R+b}} \ln(R+b) - \right.$$

$$\left. - \frac{2R-b}{\sqrt{R-b}} \ln(R-b) \right] + 4 R \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right) \quad \text{AII.5.2.3}$$

$$I_4 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{s\sqrt{r}} ds = -\frac{1}{r} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right)$$

AII.5.2.4

$$I_5 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{r^{3/2}} ds = \frac{2}{t_r} \left[ \frac{2R+b}{\sqrt{R+b}} - \frac{2R-b}{\sqrt{R-b}} \right]$$

AII.5.2.5

$$I_6 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 2(\sqrt{R+b} - \sqrt{R-b}) - \sqrt{R} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{R-b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R-b} - \sqrt{R}} \right| \right)$$

AII.5.2.6

$$I_7 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{r^{3/2}} ds = \frac{-2}{t_r} \left( \frac{1}{\sqrt{R+b}} - \frac{1}{\sqrt{R-b}} \right)$$

AII.5.2.7

Cuando el elemento es paralelo al eje de simetría con  $t_r = 0$  se tiene

$$I_1 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S}{\sqrt{R}} \left( \ln \frac{S^2}{256 R^2} - 2 \right)$$

AII.5.2.8

$$I_2 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{S}{R}$$

AII.5.2.9

$$I_3 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R^2} ds = 0 \quad \text{AII.5.2.10}$$

$$I_4 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{s \sqrt{r}} ds = 0 \quad \text{AII.5.2.11}$$

$$I_5 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{s}{r^{3/2}} ds = 0 \quad \text{AII.5.2.12}$$

$$I_6 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 0 \quad \text{AII.5.2.13}$$

$$I_7 = \int_{-S/2}^{S/2} \frac{1}{r^{3/2}} ds = -\frac{S}{R^{3/2}} \quad \text{AII.5.2.14}$$

AII.6.- INTEGRALES ANALITICAS EN EL DOMINIO

AII.6.1.- CALCULO DE LAS INTEGRALES CORRESPONDIENTES A T

$$\begin{aligned}
 I_1 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds &= \frac{2}{3 t_r^2} \left[ (b-2R) \sqrt{R+b} \ln \left| \frac{s^2}{64 R (R+b)} \right| - \right. \\
 &- \frac{4}{3} (R+b)^{3/2} + 4 R \sqrt{R+b} - 4 R^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \\
 &- 4 R^{3/2} (\ln 2 t_r + 2/3) \quad \text{AII.6.1.1}
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} ds = \frac{2}{t_r^2} \left[ (b-2R) \sqrt{R+b} + 2R^{3/2} \right] \quad \text{AII.6.1.2}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds &= \frac{2}{t_r^2} \left[ \frac{(R+b)^2 - 6 R (R+b) - 3R^2}{3 \sqrt{R+b}} \right. \\
 &\cdot \ln \frac{s^2}{64 R (R+b)} - \frac{2}{9} (R+b)^{3/2} + \frac{8}{3} R \sqrt{R+b} + 2R^2 \frac{1}{\sqrt{R+b}} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{16}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \frac{8}{3} R^{3/2} (2 \ln 2 t_r + 5) \quad \text{AII.5.1.3} \\
 \hookrightarrow &
 \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{2}{t_r} (\sqrt{R+b} - \sqrt{R}) \quad \text{AII.6.1.4}$$

$$I_5 = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} ds = \frac{2}{t_r^3} \left[ \frac{(R-b)^2 - 6R(R+b) - 3R^2}{3\sqrt{R+b}} + \frac{8R^{3/2}}{9} \right]$$

AII.6.1.5

$$I_6 = \int_{\epsilon}^S \sqrt{r} ds = \frac{2}{3t_r} \left[ (R+b)^{3/2} - R^{3/2} \right] \quad \text{AII.6.1.6}$$

$$I_7 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} ds = \frac{2}{t_r^2} \left[ \frac{2R+b}{\sqrt{R+b}} - 2\sqrt{R} \right] \quad \text{AII.6.1.7}$$

Con  $b = t_r S$

En el caso de que en la posterior integración respecto a  $s$  se escoja un  $\epsilon = \frac{-2}{\dots}$  con lo cual  $t_r = 0$ , se tendría

$$I_1 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^2}{2\sqrt{R}} \left( \ln \frac{S^2}{64 R^2} - 1 \right) \quad \text{AII.6.1.8}$$

$$I_2 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} ds = \frac{S^2}{2\sqrt{R}} \quad \text{AII.6.1.9}$$



$$I_3 = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^3}{3 R^{3/2}} \left( \ln \frac{S^2}{64 R^2} - 2/3 \right)$$

AII.6.1.10

$$I_4 = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{r} ds = \frac{S}{\sqrt{R}}$$

AII.6.1.11

$$I_5 = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} ds = \frac{S^3}{3 R^{3/2}}$$

AII.6.1.12

$$I_6 = \int_{\epsilon}^S \sqrt{r} ds = S \sqrt{r}$$

AII.6.1.13

$$I_7 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} ds = \frac{S^2}{2 R^{3/2}}$$

AII.6.1.14

AII.6.2.- CALCULO DE LAS INTEGRALES CORRESPONDIENTES A T'

$$I_1 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} ds = \frac{2}{3t_r^2} \left[ (b-2R) \sqrt{R+b} + 2R^{3/2} \right] \quad \text{AII.6.2.1}$$

$$I_2 = \int_{\epsilon}^S \frac{r^{3/2}}{s} ds = \frac{2}{3} (R+b)^{3/2} + 2R \sqrt{R+b} - R^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| -$$

$$- \frac{8}{3} R^{3/2} - R^{3/2} \ln \frac{t_r \epsilon}{4R} \quad \text{AII.6.2.1}$$

$$I_3 = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{s\sqrt{r}} ds = \frac{-1}{\sqrt{R}} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \frac{1}{\sqrt{R}} \ln \frac{t_r \epsilon}{4R} \quad \text{AII.6.2.3}$$

$$I_4 = \int_{\epsilon}^S \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 2\sqrt{R+b} - \sqrt{R} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - 2\sqrt{R} - \sqrt{R} \ln \frac{t_r \epsilon}{4R} \quad \text{AII.6.2.4}$$

$$I_5 = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{3t_r^2} \left[ (b-2R) \sqrt{R+b} \ln \frac{s^2}{64 R (R+b)} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{3} (R+b)^{3/2} + 4R \sqrt{R+b} - 4R^{3/2} \ln \left| \frac{R+b + R}{R+b - R} \right| - \right.$$

$$\left. - R^{3/2} \ln 2 t_r - \frac{8}{3} R^{3/2} \right] \quad \text{AII.6.2.5}$$

$$I_6 = \int_{\varepsilon}^S \frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{2\sqrt{R+b}}{t_r} - \frac{2\sqrt{R}}{t_r} \quad \text{AII.6.2.6}$$

$$I_7 = \int_{\varepsilon}^S \frac{r^{5/2}}{s^2} ds = t_r \left[ \frac{-(R+b)^{7/2}}{Rb} + \frac{(R+b)^{5/2}}{R} + \frac{20(R+b)^{3/2}}{3} - \right. \\ \left. - \frac{5(R+b)^{3/2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| + \frac{R^{5/2}}{\varepsilon} - \frac{23 t_r R^{3/2}}{3} - \right. \\ \left. - \frac{5 t_r R^{3/2}}{2} \ln \frac{t_r \varepsilon}{4R} \right] \quad \text{AII.6.2.7}$$

$$I_8 = \int_{\varepsilon}^S \frac{1}{s^2 \sqrt{r}} ds = t_r \left[ -\frac{\sqrt{R+b}}{Rb} + \frac{1}{2 R^{3/2}} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{R} \varepsilon} + \frac{t_r}{2 R^{3/2}} \ln \frac{t_r \varepsilon}{4R} \right] \quad \text{AII.6.2.8}$$

$$I_9 = \int_{\varepsilon}^S \frac{\sqrt{r}}{s^2} ds = t_r \left[ -\frac{(R+b)^{3/2}}{Rb} + \frac{\sqrt{R+b}}{R} - \frac{1}{2\sqrt{R}} \right. \\ \left. \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| + \frac{\sqrt{R}}{\varepsilon} - \frac{t_r}{2\sqrt{R}} \ln \frac{t_r \varepsilon}{4R} - \frac{t_r}{\sqrt{R}} \right] \quad \text{AII.6.2.9}$$

$$I_{10} = \int_{\epsilon}^S \sqrt{r} \, ds = \frac{2 (R+b)^{3/2}}{3 t_r} - \frac{2 R^{3/2}}{3 t_r} \quad \text{AII.6.2.10}$$

$$I_{11} = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} \, ds = \frac{2}{t_r^3} \left[ \frac{(R+b)^2 - 6R(r+b) - 3R^2}{3 R+b} + 8/9 R^{3/2} \right] \quad \text{AII.6.2.11}$$

$$I_{12} = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{r^{3/2}} \, ds = - \frac{2}{t_r} \left( \frac{1}{\sqrt{R+b}} - \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \quad \text{AII.6.2.12}$$

$$I_{13} = \int_{\epsilon}^S \frac{r^{3/2}}{s^2} \, ds = t_r \left[ \frac{-(R+b)^{5/2}}{Rb} + \frac{(R+b)^{3/2}}{R} + 3\sqrt{R+b} - 3/2 \sqrt{R} \right. \\ \left. + \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| + \frac{R^{3/2}}{\epsilon} - 4 t_r \sqrt{R} - 3/2 t_r \sqrt{R} \ln \frac{t_r \epsilon}{4R} \right] \quad \text{AII.6.2.13}$$

$$I_{14} = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} \, ds = \frac{2}{t_r^2} \left[ \frac{2R+b}{\sqrt{R+b}} - 2\sqrt{R} \right] \quad \text{AII.6.2.14}$$

$$I_{15} = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{\sqrt{r}} \, ds = \frac{2}{t_r^3} \left[ \frac{(R+b)^2}{5} - 2/3 R (R+b) + R^2 \right] \sqrt{R+b} - \\ - \frac{16}{15 t_r^3} R^{5/2} \quad \text{AII.6.2.15}$$

$$\begin{aligned}
 I_{16} = & \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{t_r^3} \left[ \left[ \frac{(R+b)^2}{5} - \frac{2}{3} R \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot (R+b) + R^2 \right] \sqrt{R+b} \ln \frac{s^2}{64 R (R+b)} - \frac{2}{75} (R+b)^{5/2} + \frac{4}{3} R \cdot \right. \\
 & \left. \cdot (R+b)^{3/2} + \frac{20}{3} R^2 \sqrt{R+b} - \frac{1}{3} R^{5/2} \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| - \right. \\
 & \left. - \frac{8}{15} R^{5/2} \ln \frac{\epsilon^2}{64 R^2} - \frac{598}{75} R^{5/2} - \frac{1}{3} R^{5/2} \ln \frac{t_r \epsilon}{4R} \right]
 \end{aligned}$$

AII.6.2.16

$$\begin{aligned}
 I_{17} = & \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{t_r^3} \left[ \frac{(R+b)^2 - 6R(R+b) - 3R^2}{3\sqrt{R+b}} \right. \\
 & \left. \cdot \ln \frac{s^2}{64 R (R+b)} - \frac{2}{9} (R+b)^{3/2} + \frac{8}{3} R \sqrt{R+b} + 2R^2 \frac{1}{\sqrt{R+b}} - \right. \\
 & \left. - \frac{16}{3} R^{3/2} \ln 2 t_r - \frac{40}{3} R^{3/2} \right]
 \end{aligned}$$

AII.6.2.17

$$I_{18} = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{2}{t_r^2} \left[ \frac{2R+b}{\sqrt{R+b}} \right]$$

$$\begin{aligned} & \cdot \ln \frac{S^2}{64 R (R+b)} - \frac{2 (2R + B)}{\sqrt{R+b}} + 4 R \ln \left| \frac{\sqrt{R+b} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+b} - \sqrt{R}} \right| + \\ & + 2 \sqrt{R} \ln 2 t_r - 4 \sqrt{R} \end{aligned}$$

AII.6.2.18

Para el caso de elementos paralelos al eje r con  $t_r = 0$  se tiene

$$I_1 = \int_{\xi}^S \frac{s}{\sqrt{r}} ds = \frac{s^2}{\sqrt{R}}$$

AII.6.2.19

$$I_2 = \int_{\xi}^S \frac{r^{3/2}}{s} ds = R^{3/2} (\ln S - \ln \xi)$$

AII.6.2.20

$$I_3 = \int_{\xi}^S \frac{1}{s r} ds = \frac{1}{\sqrt{R}} (\ln S - \ln \xi)$$

AII.6.2.21

$$I_4 = \int_{\xi}^S \frac{\sqrt{r}}{s} ds = 0$$

AII.6.2.22

$$I_5 = \int_{\xi}^S \frac{s}{\sqrt{r}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^2}{2\sqrt{R}} \left( \ln \frac{s^2}{64 R^2} - 1 \right)$$

AII.6.2.23

$$I_6 = \int_{\xi}^S \frac{1}{\sqrt{r}} ds = \frac{S}{\sqrt{R}}$$

AII.6.2.24

$$I_7 = \int_{\epsilon}^S \frac{r^{5/2}}{s^2} ds = -\frac{R^{5/2}}{S} + \frac{R^{5/2}}{\epsilon} \quad \text{AII.6.2.25}$$

$$I_8 = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{s^2 \sqrt{r}} ds = \frac{-1}{\sqrt{R}} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad \text{AII.6.2.26}$$

$$I_9 = \int_{\epsilon}^S \frac{\sqrt{r}}{s^2} ds = -\sqrt{R} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad \text{AII.6.2.27}$$

$$I_{10} = \int_{\epsilon}^S \sqrt{r} ds = \sqrt{R} S \quad \text{AII.6.2.28}$$

$$I_{11} = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} ds = \frac{s^3}{3 R^{3/2}} \quad \text{AII.6.2.29}$$

$$I_{12} = \int_{\epsilon}^S \frac{1}{r^{3/2}} ds = \frac{S}{R^{3/2}} \quad \text{AII.6.2.30}$$

$$I_{13} = \int_{\epsilon}^S \frac{r^{3/2}}{s^2} ds = -R^{3/2} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{\epsilon} \right) \quad \text{AII.6.2.31}$$

$$I_{14} = \int_{\epsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} ds = \frac{S^2}{2 R^{3/2}} \quad \text{AII.6.2.32}$$

$$I_{15} = \int_{\epsilon}^S \frac{s^2}{\sqrt{r}} ds = \frac{S^3}{3 \sqrt{R}} \quad \text{AII.6.2.33}$$

$$I_{16} = \int_{\varepsilon}^S \frac{s^2}{r} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^3}{3 \sqrt{R}} \left( \ln \frac{s^2}{64 R^2} - 2/3 \right) \quad \text{A11.6.2.34}$$

$$I_{17} = \int_{\varepsilon}^S \frac{s^2}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^3}{3 R^{3/2}} \left( \ln \frac{s^2}{64 R^2} - 2/3 \right)$$

A11.6.2.35

$$I_{18} = \int_{\varepsilon}^S \frac{s}{r^{3/2}} \ln \frac{s^2}{64 R r} ds = \frac{S^2}{2 r^{3/2}} \left( \ln \frac{s^2}{64 R^2} - 1 \right)$$

A11.6.2.36



## BIOGRAFIA

---

### BIOGRAFIA

Manuel Doblaré Castellano nació en Córdoba en el año 1956 realizando sus estudios de bachillerato en el I.N.B. Seneca.

Cursa la carrera de Ingeniero Industrial en la E.T.S.I.I. de Sevilla obteniendo el título en el año 1978 con el nº 1 de su promoción.

Finalizados los estudios de Ingeniería se incorpora a la Cátedra de Elasticidad y Resistencia de Materiales de dicha Escuela, impartiendo clases de dicha materia y tomando parte en diferentes cursos de investigación y perfeccionamiento ( Cálculo Matricial y Elementos Finitos ). Asimismo realiza el Proyecto fin de Carrera sobre el Método de los elementos Finitos.

Se incorpora a la E.T.S.I.I. de Madrid en el año 1979, integrándose en la Cátedra de Estructuras donde ha realizado la presente Tesis y distintos trabajos de investigación, tanto en lo que se refiere al capítulo de artículos y comunicaciones a Congresos, como a Informes a distintas empresas y entidades públicas.

Por último ha colaborado también con departamentos extranjeros permaneciendo en el Dpto. de Ingeniería Civil de la Universidad de Southampton durante los meses de Julio y Agosto de 1980.

